

Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН

Выпуклое
программирование
Элементы теории



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

Выпуклое программирование (элементы теории),
Е. Г. Гольштейн (серия «Экономико-математическая
библиотека»). Главная редакция физико-математичес-
кой литературы изд-ва «Наука», 1970.

Книга содержит подробное, достаточно полное и вместе с тем элементарное изложение основных фактов теории выпуклого программирования — дисциплины, изучающей важный класс экстремальных задач с большим числом переменных и ограничений. За отправной пункт принята основная теорема антагонистических игр Дж. фон Неймана.

Следствиями приведенного в книге обобщения теоремы Дж. фон Неймана являются двойственные соотношения выпуклого программирования и связанные с ними так называемые критерии оптимальности. Из тех же соображений выводятся обобщенная теорема двойственности для задач выпуклого программирования и ряд других предложений. Значительное место уделяется так называемым теоремам о маргинальных значениях, выявляющим влияние флуктуаций в условиях задачи на ее решение.

Книга предназначена для широкого круга математиков, экономистов и инженеров, работающих в области математической экономики, автоматического регулирования и исследования операций.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
§ 1. Двойственная задача	5
§ 2. Основная теорема антагонистических игр и ее обобщения	11
§ 3. Теоремы двойственности	26
§ 4. Двойственные задачи, задача об отыскании седловой точки, критерии оптимальности	38
§ 5. Квазивыпуклые задачи	43
§ 6. Обобщенная теорема двойственности	49
§ 7. Устойчивость и маргинальные значения	56
Литература	67

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой для этой книги послужили лекции по теории выпуклого программирования, которые были прочитаны автором летом 1968 г. слушателям Всесоюзной школы по математическому программированию, проходившей в г. Алма-Ате.

Известно, какую большую роль в линейном программировании играет теория двойственности и связанный с ней двойственный подход к анализу линейных задач. Этот подход, с одной стороны, позволяет дать достаточно точное математическое описание ряда экономических механизмов, а с другой стороны, приводит к эффективным вычислительным методам линейного программирования. Значительное место в книге отведено построению теории двойственности для задач выпуклого программирования. Пара двойственных задач выпуклого программирования тесно связана с задачей об отыскании седловой точки, соответствующей функции Лагранжа. Поэтому развиваемый здесь подход к анализу задач выпуклого программирования близко соприкасается с известным подходом Куна — Таккера ([10], [8]). Однако, как будет показано, способ изложения, принятый в книге, позволяет построить более общую теорию выпуклого программирования.

В книге принят не совсем традиционный путь построения теории двойственных задач выпуклого программирования (см. [1], [4]); за отправной пункт здесь взята основная теорема теории антагонистических игр, принадлежащая Дж. фон Нейману (обычно связь между теоремами выпуклого программирования и теоремой Дж. фон Неймана не отмечается).

Кроме основных фактов теории выпуклого программирования в книгу включен также ряд результатов по теории маргинальных значений задач выпуклого программирования.

Хотя изложение ведется для случая конечномерных задач, многие из приведенных ниже теорем остаются справедливыми и для более общих бесконечномерных задач, причем переход к функциональным пространствам не связан, как правило, с изменением структуры соответствующих обоснований.

Автор

§ 1. ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

Под общей задачей выпуклого программирования понимают задачу отыскания верхней грани функции $f(x)$:

$$f(x) \rightarrow \sup \quad (1)$$

при соблюдении ограничений

$$f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$x \in G, \quad (3)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, f и f_i — определенные на G и выпуклые вверх функции, G — выпуклое подмножество n -мерного пространства.

Напомним, что множество G называется *выпуклым*, если для любых точек $x', x'' \in G$ и произвольного числа λ , $0 < \lambda < 1$, точка

$$x_\lambda = \lambda x' + (1 - \lambda)x'' \in G.$$

Напомним также, что определенная на выпуклом множестве G функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх (вниз)*, если для любых точек $x', x'' \in G$ и произвольного числа λ , $0 < \lambda < 1$,

$$f(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \geq (\leq) \lambda f(x') + (1 - \lambda)f(x'').$$

Обозначим через R множество точек, удовлетворяющих ограничениям (2), (3):

$$R = \{x: f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x \in G\}.$$

Из выпуклости множества G и выпуклости вверх функций f и f_i непосредственно вытекает выпуклость множества R ,

Итак, задача (1)–(3) состоит в максимизации выпуклой вверх функции $f(x)$ на выпуклом множестве R . Формально ограничения задачи (1)–(3) можно было бы записать так: $x \in R$. Однако эта запись не дает возможности детально изучить каждое из ограничений (2), участвующих в формировании множества R . В дальнейшем каждому ограничению (2) будет поставлена в соответствие переменная двойственной задачи. Поэтому представление R в виде (2), (3) окажется для нас более удобным. Заметим, что такое представление может быть сделано далеко не единственным способом. Обычно в множество G объединяют точки, удовлетворяющие простым ограничениям типа: $x \geq 0$, $\alpha \leq x \leq \beta$ и т. п. Однако в ряде случаев (например, в теории блочного программирования) оказывается полезным рассматривать более сложно устроенные множества G . В дальнейшем под G понимается произвольное выпуклое множество.

Введем несколько определений. Точки $x \in R$ будем называть *планами* задачи (1)–(3). Последовательность $X = \{x^{(k)}\}$ планов $x^{(k)}$ назовем *планом-последовательностью*, если $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)})$ существует (конечный или бесконечный). Положим

$$f(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}).$$

План-последовательность X^* называется *решением* задачи, если

$$f(X^*) = \sup_{x \in R} f(x).$$

Любая задача типа (1)–(3) имеет в качестве решения некоторый план-последовательность, но легко строить примеры задач, у которых нет решений-планов. Последнее обстоятельство и заставило нас расширить множество планов, введя понятие плана-последовательности.

Составим для задачи (1)–(3) так называемую функцию Лагранжа

$$F(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x), \quad x \in G, \quad y \geq 0,$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, и с ее помощью представим нашу задачу в эквивалентном, более удобном для последующего анализа виде.

Положим

$$\varphi(x) = \inf_{y \geq 0} F(x, y), \quad x \in G, \quad (4)$$

и рассмотрим задачу максимизации функции $\varphi(x)$ на множестве G :

$$\varphi(x) \rightarrow \sup, \quad (5)$$

$$x \in G. \quad (6)$$

Обозначим

$$v = \begin{cases} \sup_{x \in R} f(x), & \text{если } R \neq \emptyset, \\ -\infty, & \text{если } R = \emptyset; \end{cases}$$

$$v' = \sup_{x \in G} \varphi(x).$$

Лемма 1. Задачи (1) — (3) и (4) — (6) эквивалентны, т. е.

а) $v = v'$;

б) если $X = \{x^{(k)}\}$ — решение задачи (1) — (3), то эта последовательность является также решением задачи (4) — (6);

в) если $X = \{x^{(k)}\}$ — решение задачи (4) — (6), причем

$$\varphi(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}) > -\infty,$$

то X — решение задачи (1) — (3).

Доказательство. Пусть $x \in R$. Поскольку $f_i(x) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то при любом $y \geq 0$

$$F(x, y) \geq f(x).$$

С другой стороны, $F(x, 0) = f(x)$. Следовательно,

$$\varphi(x) = \inf_{y \geq 0} F(x, y) = F(x, 0) = f(x).$$

Если же $x \in R$, то $f_i(x) < 0$ хотя бы для одного значения индекса i . Пусть, например, $f_1(x) < 0$. Положим $y^{(k)} = (k, 0, 0, \dots, 0)$,

Очевидно,

$$\varphi(x) = \inf_{y \geq 0} F(x, y) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F(x, y^{(k)}) = -\infty.$$

Итак,

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in R, \\ -\infty & \text{при } x \notin R. \end{cases} \quad (7)$$

Если $v = -\infty$, т. е. множество R пусто, то согласно (7)

$$\varphi(x) \equiv -\infty, \text{ т. е. } v' = -\infty.$$

Если же $v > -\infty$, т. е. $R \neq \emptyset$, то согласно (7)

$$v' = \sup_G \varphi(x) = \sup_{x \in R} f(x) = v.$$

Утверждение а) доказано.

Предположим, что $X = \{x^{(k)}\}$ — решение задачи (1)–(3), т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = v > -\infty.$$

Поскольку $x^{(k)} \in R$, то согласно (7)

$$v = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}).$$

Если далее учесть а), то получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}) = v',$$

что доказывает утверждение б). Аналогично доказывается и утверждение в) леммы.

Заметим, что при доказательстве леммы 1 мы не пользовались тем, что (1)–(3) — задача выпуклого программирования; каковы бы ни были функции f, f_i и множество G , задачи (1)–(3) и (4)–(6) являются эквивалентными. Приведенная лемма показывает, что исходная задача (1)–(3) эквивалентна задаче отыскания

$$\sup_{x \in G} \inf_{y \geq 0} F(x, y), \quad (8)$$

где операции «inf» и «sup» применяются именно в той последовательности, которая зафиксирована в соотношении (8).

Для того чтобы сформулировать двойственную к (1)–(3) задачу, поменяем местами «inf» и «sup» в формуле (8). Положим

$$\psi(y) = \sup_{x \in G} F(x, y). \quad (9)$$

Задача, двойственная к задаче (1)–(3), по определению состоит в минимизации функции $\psi(y)$ на множестве $\{y \geq 0\}$:

$$\psi(y) \rightarrow \inf, \quad (10)$$

$$y \geq 0. \quad (11)$$

Экстремальное значение в двойственной задаче, т. е. нижнюю грань функции $\psi(y)$ на положительном ортанте $y \geq 0$, обозначим через v .

Проиллюстрируем приведенную общую схему формирования двойственной задачи на примере общей задачи линейного программирования. Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

В данном случае

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad f_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$G = \{x: x \geq 0\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m b_i y_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j. \end{aligned}$$

В соответствии с общим правилом построения двойственной задачи введем функцию

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \sup_{x \in G} F(x, y) = \\ &= \sup_{x \geq 0} \left[\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m b_i y_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m b_i y_i + \sup_{x \geq 0} \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j.\end{aligned}$$

Положим

$$c_j(y) = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно,

$$\sup_{x \geq 0} \sum_{j=1}^n c_j(y) x_j = \sum_{j=1}^n \sup_{x_j \geq 0} [c_j(y) x_j].$$

Далее,

$$\sup_{x_j \geq 0} [c_j(y) x_j] = \begin{cases} 0 & \text{при } c_j(y) \leq 0, \\ \infty & \text{при } c_j(y) > 0. \end{cases}$$

Следовательно, если y удовлетворяет ограничениям: $c_j(y) \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$, то

$$\sup_{x \geq 0} \sum_{j=1}^n c_j(y) x_j = 0 \quad \text{и} \quad \psi(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i.$$

В противном случае

$$\sup_{x \geq 0} \sum_{j=1}^n c_j(y) x_j = \infty \quad \text{и} \quad \psi(y) = \infty.$$

Пусть $T = \{y: c_j(y) \leq 0, j = 1, 2, \dots, n\}$. Мы показали, что

$$\psi(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m b_i y_i & \text{при } y \in T, \\ \infty & \text{при } y \notin T. \end{cases}$$

Поскольку двойственная задача состоит в минимизации функции $\psi(y)$, то достаточно рассматривать эту функцию лишь в таких точках y , в которых $\psi(y) < \infty$. Другими словами, двойственная к (12)–(14) задача состоит в минимизации функции $\psi(y)$ на множестве неотрицательных $y \in T$. Итак, окончательная формулировка двойственной задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \quad (15)$$

$$c_j(y) = c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

Получили хорошо известную запись двойственной задачи линейного программирования.

Напомним, что ограничения (16) этой задачи отсекают множество точек y , в которых $\psi(y) < \infty$. Аналогично общая схема построения двойственной задачи может быть детализирована и для некоторых других частных классов задач выпуклого программирования (например, для задач квадратичного программирования). Как и в рассмотренном случае, дополнительные ограничения двойственной задачи возникают в результате отсева точек y , в которых $\psi(y) = \infty$. Однако мы не будем больше на этом останавливаться.

§ 2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Под теоремой двойственности мы будем понимать предложение, которое при некоторых допущениях гарантирует справедливость равенства:

$$v = \tilde{v},$$

называемого обычно соотношением двойственности. Здесь

согласно принятым ранее обозначениям и лемме 1

$$v = \left\{ \begin{array}{ll} \sup_{x \in R} f(x), & R \neq \emptyset \\ -\infty, & R = \emptyset \end{array} \right\} = \sup_{x \in G} \varphi(x) = \sup_{x \in G} \inf_{y \geq 0} F(x, y);$$

$$\bar{v} = \inf_{y \geq 0} \psi(y) = \inf_{y \geq 0} \sup_{x \in G} F(x, y).$$

Таким образом, соотношение двойственности эквивалентно равенству

$$\sup_{x \in G} \inf_{y \geq 0} F(x, y) = \inf_{y \geq 0} \sup_{x \in G} F(x, y), \quad (18)$$

в котором $F(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^n y_i f_i(x)$ — функция Лагранжа задачи (1) — (3). Так как f и f_i — выпуклые вверх функции, а $y \geq 0$, функция $F(x, y)$ выпукла вверх по x . Кроме того, эта функция, очевидно, линейна по y . Поэтому, если бы выпуклые множества, по которым берутся верхняя и нижняя грани в (18), были компактами (ограниченными и замкнутыми множествами), то равенство (18) вытекало бы из теоремы Дж. фон Неймана [6] для антагонистических игр. Однако в нашем случае одно из этих множеств ($y \geq 0$) заведомо не ограничено, а другое (G), вообще говоря, тоже не ограничено. Этим обстоятельством и объясняется тот факт, что двойственные соотношения для задач выпуклого программирования имеют место лишь при соблюдении некоторых дополнительных предположений относительно исследуемых задач. В этом, видимо, также причина того, что теорема Дж. фон Неймана не находила до сих пор применений в теории выпуклого программирования: обычно для получения тех или иных теорем двойственности используются специальные конструкции и рассуждения. Ниже мы сделаем попытку покинуть традиционный путь изложения теории выпуклого программирования и будем по возможности базироваться на теореме Дж. фон Неймана, вернее на некотором ее усилении. Такой подход, во-первых, выявляет естественную преемственность между теорией антагонистических игр и выпуклым программированием, а во-вторых, позволяет получить более общие результаты,

Забудем на время нашу задачу (1) — (3), породившую функцию $F(x, y)$, и рассмотрим функцию $f(x, y)$, зависящую от n -мерного вектора $x \in X$ и m -мерного вектора $y \in Y$. Множества X и Y , на произведении которых определена функция $f(x, y)$, предполагаются выпуклыми; при любом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ выпукла вверх по $x \in X$; при любом фиксированном $x \in X$ функция $f(x, y)$ выпукла вниз по Y . Мы будем опираться на следующий вариант теоремы Дж. фон Неймана, принадлежащий Г. Кнезеру [9].

Т е о р е м а 1. *Если одно из множеств X, Y является компактом (т. е. ограниченным и замкнутым) и функция $f(x, y)$ непрерывна по соответствующему переменному, то*

$$\sup_X \inf_Y f(x, y) = \inf_Y \sup_X f(x, y). \quad (19)$$

Прежде всего докажем одно совсем простое утверждение.

Л е м м а 2. *Каковы бы ни были функция $f(x, y)$ и множества X и Y ,*

$$\sup_X \inf_Y f(x, y) \leq \inf_Y \sup_X f(x, y). \quad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, при любых $x \in X$ и $y \in Y$

$$\varphi(x) = \inf_Y f(x, y) \leq \sup_X f(x, y) = \psi(y).$$

Переходя в левой части этого неравенства к верхней грани по x , а в правой — к нижней грани по y , получаем (20)

Доказательство теоремы 1 опирается на две известные теоремы функционального анализа, формулировки которых мы считаем целесообразным здесь привести. Пусть B — банахово пространство; K — выпуклое подмножество B . Следующее утверждение известно под названием теоремы о разделяющей гиперплоскости.

Если выпуклое множество K содержит внутренние точки, а точка $p \in B$ не является внутренней точкой K , то существует такой ненулевой линейный ограниченный

функционал $l(z)$, определенный на B , что $l(z) \leq l(p)$ для любого элемента $z \in K$.

Пусть X — компакт конечномерного пространства. Рассмотрим банахово пространство $C(X)$ непрерывных на X вещественных функций, в котором норма элемента $\varphi(x)$ задается соотношением

$$|\varphi| = \max_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

При доказательстве теоремы 1 мы будем использовать теорему о разделяющей гиперплоскости для некоторого подмножества пространства $C(X)$. Поэтому нам понадобится знание общего вида линейного ограниченного функционала, определенного на $C(X)$. Введем систему S подмножеств σ множества X с помощью следующих требований:

- а) S содержит все открытые подмножества множества X и для любого $\sigma \in S$ множество $\bar{\sigma} = X \setminus \sigma \in S$;
- б) вместе с любой конечной или счетной последовательностью своих элементов S содержит их объединение;
- в) S — минимальная система, обладающая свойствами а) и б).

Введенная система S называется *системой борелевских подмножеств* X .

Пусть μ — вещественная функция, определенная на системе S борелевских подмножеств X . Функция μ называется *мерой* на X , если для любой не более чем счетной последовательности непересекающихся множеств $\sigma_i \in S$, $i = 1, 2, \dots$,

$$\mu\left(\bigcup_i \sigma_i\right) = \sum_i \mu(\sigma_i).$$

Полной вариацией функции μ на множестве X называется число

$$\text{var } \mu_X = \sup \sum_i |\mu(\sigma_i)|,$$

где верхняя грань берется по всевозможным последовательностям, которые состоят из непересекающихся множеств $\sigma_i \in S$ и содержат не более чем счетное число элементов. Если $\text{var } \mu_X < \infty$, то мера μ называется *ограниченной*.

Пусть μ — произвольная ограниченная мера на X . Обычным образом можно ввести понятие измеримой относительно μ функции и для каждой измеримой относительно μ ограниченной функции $\varphi(x)$, $x \in X$, определить интеграл по мере μ на множестве X : $\int_X \varphi(x) d\mu$ (делается это точно так же, как и в случае, когда μ — обычная мера Лебега). В частности, интегрируемой оказывается любая непрерывная на X функция. Мы будем использовать следующую теорему Ф. Рисса:

Если $l(\varphi)$ — линейный ограниченный функционал, определенный на $C(X)$, то найдется такая ограниченная мера μ , что

$$l(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\mu, \quad |l| = \text{var } \mu_X;$$

причем в случае неотрицательности функционала l , т. е. если $l(\varphi) \geq 0$ для любой неотрицательной на X функции $\varphi(x)$, мера μ неотрицательна и, следовательно, $|l| = \mu(X)$.

Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная функция, определенная и выпуклая вверх на выпуклом компакте X , μ — неотрицательная мера на X , причем $\mu(X) = 1$. Положим $x_\mu = \int_X x d\mu$. Покажем, что

$$\varphi(x_\mu) \geq \int_X \varphi(x) d\mu, \quad x_\mu \in X. \quad (21)$$

Действительно, с произвольной степенью точности можно заменить интегралы в (21) соответствующими интегральными суммами, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x_i \in X$ и $\mu_i \geq 0$, что

$$\left| x_\mu - \sum_i \mu_i x_i \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_X \varphi(x) d\mu - \sum_i \varphi(x_i) \mu_i \right| \leq \varepsilon, \quad (22)$$

$$\sum_i \mu_i = 1.$$

Поскольку X — выпуклое множество, а $\varphi(x)$ — выпуклая вверх функция, то

$$\varphi\left(\sum_i \mu_i x_i\right) \geq \sum_i \mu_i \varphi(x_i), \quad \sum_i \mu_i x_i \in X.$$

Искомые соотношения (21) — следствие последних неравенств, неравенств (22) и произвольности $\varepsilon > 0$. После этих предварительных замечаний перейдем к обоснованию утверждения теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть для определенности X — компакт и $f(x, y)$ — непрерывная функция x при любом фиксированном $y \in Y$. Будем рассматривать пространство $C(X)$ непрерывных на компакте X функций $\varphi(x)$. Определим в этом пространстве множество $K \subset C(X)$ с помощью следующего условия:

$$K = \{\varphi(x) : \varphi(x) \geq f(x, y)\}$$

для некоторого $y \in Y$ и каждого $x \in X$. Множество K выпукло. Действительно, если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — любые элементы K , $0 < \alpha < 1$, то

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x) &= \alpha\varphi_1(x) + (1 - \alpha)\varphi_2(x) \geq \\ &\geq \alpha f(x, y_1) + (1 - \alpha)f(x, y_2), \quad y_1, y_2 \in Y. \end{aligned}$$

Из выпуклости вниз по y функции $f(x, y)$ и выпуклости множества Y вытекает, что

$$\alpha f(x, y_1) + (1 - \alpha)f(x, y_2) \geq f(x, y_\alpha),$$

где $y_\alpha = \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \in Y$.

Следовательно, нашлась такая точка $y_\alpha \in Y$, что

$$\varphi_\alpha(x) \geq f(x, y_\alpha), \quad x \in X,$$

т. е. $\varphi_\alpha(x) \in K$. Выпуклость K доказана. Множество K содержит внутренние точки. Пусть $y \in Y$. Тогда $\bar{\varphi}(x) = f(x, y) + 1$ — внутренняя точка K , так как для любого элемента $\varphi(x) \in C(X)$, норма которого не превосходит единицу,

$$\bar{\varphi}(x) + \varphi(x) \geq f(x, y), \quad x \in X,$$

т. е., $\bar{\varphi}(x) + \varphi(x) \in K$.

Итак, K — выпуклое множество, содержащее внутренние точки. Пусть $\varphi_v^*(x) \equiv v$, $x \in X$. Положим

$$v_1 = \sup_X \inf_Y f(x, y), \quad v_2 = \inf_Y \sup_X f(x, y).$$

Поскольку при любом $y \in Y$ величина $\sup_x f(x, y) < \infty$, то $v_2 < \infty$. Дальнейшие рассуждения ведутся в предположении, что $v_2 > -\infty$. Проверим, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\varphi_{v_2 - \varepsilon}^*(x) \notin K. \quad (23)$$

Действительно, если допустить противное, то найдется такая точка $y_\varepsilon \in Y$, что $v_2 - \varepsilon \geq f(x, y_\varepsilon)$, $x \in X$. Из этого соотношения имеем

$$v_2 - \varepsilon \geq \sup_x f(x, y_\varepsilon) \geq \inf_Y \sup_x f(x, y) = v_2, \text{ т. е. } \varepsilon \leq 0.$$

Но по предположению $\varepsilon > 0$. Полученное противоречие доказывает (23). Соотношение (23), справедливое при любом $\varepsilon > 0$, означает, что элемент $\varphi_{v_2}^*(x)$ не является внутренней точкой множества K .

Применим теперь теорему о разделяющей гиперплоскости к множеству K и точке $\varphi_{v_2}^* = \varphi_{v_2}^*(x)$. Согласно этой теореме существует такой ненулевой линейный ограниченный функционал $l(\varphi)$, определенный на $C(X)$, что

$$l(\varphi) \geq l(\varphi_{v_2}^*) \quad (24)$$

для каждой точки $\varphi \in K$. Установим неотрицательность функционала l . С этой целью допустим существование неотрицательной непрерывной функции $\varphi_0(x) = \varphi_0 \in C(X)$, для которой

$$l(\varphi_0) < 0. \quad (25)$$

Без уменьшения общности можно считать, что

$$\varphi_0(x) > \delta > 0, \quad x \in X, \quad (26)$$

так как в противном случае мы заменили бы $\varphi_0(x)$ на функцию $\varphi_0(x) + \varphi_\delta^*(x)$, которая при достаточно малом δ в силу ограниченности функционала l удовлетворяет (25). Из неравенства (26) и определения множества K следует, что при достаточно большом $\lambda > 0$

$$\lambda \varphi_0(x) \in K,$$

откуда, учитывая (24), имеем

$$l(\varphi_0) \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\lambda} l(\lambda \varphi_0) \right] = 0,$$

вопреки допущению (25). Полученное противоречие доказывает неотрицательность функционала l .

Воспользуемся теперь теоремой Ф. Рисса, согласно которой неотрицательный ограниченный линейный функционал l может быть представлен в виде

$$l(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\lambda, \quad (27)$$

где λ — некоторая неотрицательная мера на компакте X , $|\lambda| = \lambda(X) > 0$. Перепишем (24) с учетом представления (27):

$$\int_X \varphi(x) d\lambda \geq \int_X v_2 d\lambda = v_2 \cdot \lambda(X) \quad (28)$$

для любой функции $\varphi(x) \in K$. Если теперь положить

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda(X)} \text{ и } \varphi(x) = f(x, y) \in K$$

при любом фиксированном $y \in Y$, то согласно (28) получим

$$\int_X f(x, y) d\lambda^* \geq v_2, \quad y \in Y. \quad (29)$$

Поскольку при фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ выпукла вверх на выпуклом компакте X , λ^* — неотрицательная мера, $\lambda^*(X) = 1$, то согласно неравенству (21)

$$f(x_{\lambda^*}, y) \geq \int_X f(x, y) d\lambda^*, \quad x_{\lambda^*} = \int_X x d\lambda^* \in X. \quad (30)$$

Из соотношений (29) и (30) получаем

$$v_2 \leq \int_X f(x, y) d\lambda^* \leq f(x_{\lambda^*}, y)$$

при любом $y \in Y$ и некотором $x_{\lambda^*} \in X$, т. е.

$$v_2 \leq \inf_{y \in Y} f(x_{\lambda^*}, y) \leq \sup_X \inf_Y f(x, y) =: v_1. \quad (31)$$

Но согласно неравенству (20) (лемма 1) $v_1 \leq v_2$. Следовательно,

$$v_1 = \sup_{X_1} \inf_Y f(x, y) = v_2 = \inf_Y \sup_X f(x, y).$$

Итак, при $v_2 > -\infty$ теорема 1 доказана. Если же $v_2 = -\infty$, то по лемме 1 $v_1 \leq v_2 = -\infty$, что доказывает теорему и в этом случае. Теорема доказана полностью.

Дальнейшие наши усилия будут направлены на ослабление требований теоремы 1, гарантирующих соблюдение соотношения (19). Введем функции

$$\varphi(x) = \inf_Y f(x, y), \quad x \in X; \quad \psi(y) = \sup_X f(x, y), \quad y \in Y.$$

Согласно принятым ранее обозначениям

$$v_1 = \sup_X \varphi(x), \quad v_2 = \inf_Y \psi(y).$$

Отметим некоторые простейшие свойства функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

Л е м м а 3. Если функция $f(x, y)$ выпукла вверх по $x \in X$ (X — выпуклое множество), то $\varphi(x)$ — выпуклая вверх функция.

Если функция $f(x, y)$ выпукла вниз по $y \in Y$ (Y — выпуклое множество), то $\psi(y)$ — выпуклая вниз функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лишь первую часть леммы (вторая — обосновывается аналогично). Пусть $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$, где x_1, x_2 — произвольные точки X , α — любое число из $(1, 0)$. Зафиксируем $y \in Y$. Тогда согласно условию леммы

$$f(x_\alpha, y) \geq \alpha f(x_1, y) + (1 - \alpha) f(x_2, y).$$

Используя это неравенство, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x_\alpha) &= \inf_Y f(x_\alpha, y) \geq \inf_Y [\alpha f(x_1, y) + (1 - \alpha) f(x_2, y)] \geq \\ &\geq \alpha \inf_Y f(x_1, y) + (1 - \alpha) \inf_Y f(x_2, y) = \alpha \varphi(x_1) + (1 - \alpha) \varphi(x_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi(x)$ — выпуклая вверх функция. Лемма доказана.

Перед тем, как сформулировать следующее утверждение, напомним понятие полунепрерывности. Говорят, что функция $z(t)$ *полунепрерывна сверху (снизу)* в точке t_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|t - t_0| \leq \delta(\varepsilon)$

$$z(t) \leq z(t_0) + \varepsilon \quad (z(t) \geq z(t_0) - \varepsilon).$$

Л е м м а 4. В предположении полунепрерывности сверху $f(x, y)$ по x при любом фиксированном $y \in Y$ функция $\varphi(x)$ полунепрерывна сверху в каждой точке множества X .

В предположении полунепрерывности снизу $f(x, y)$ по y при любом фиксированном $x \in X$ функция $\psi(y)$ полунепрерывна снизу в каждой точке множества Y .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся снова обоснованием только той части леммы, которая касается функции $\varphi(x)$.¹

Пусть $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Из определения функции $\varphi(x)$ вытекает существование такой точки y_ε , что

$$\varphi(x_0) \geq f(x_0, y_\varepsilon) - \varepsilon/2.$$

Далее, в силу полунепрерывности сверху $f(x, y_\varepsilon)$ по x найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta(\varepsilon)$

$$f(x, y_\varepsilon) - f(x_0, y_\varepsilon) \leq \varepsilon/2.$$

Используя оба полученных неравенства и определение функции $\varphi(x)$, имеем

$$\varphi(x_0) \geq f(x_0, y_\varepsilon) - \varepsilon/2 \geq f(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \geq \varphi(x) - \varepsilon,$$

если $|x - x_0| \leq \delta(\varepsilon)$.

Лемма доказана.

Известно, что функция, полунепрерывная сверху (снизу) в каждой точке некоторого компакта, достигает на нем своей верхней (нижней) грани. Поэтому, согласно лемме 4, функция $\varphi(x)$ достигает своей верхней грани на любом компактном подмножестве множества X , а функция $\psi(y)$ достигает своей нижней грани на любом компактном подмножестве множества Y .

Пусть $G \subset X$, $F \subset Y$. Введем обозначения

$$\varphi_F(x) = \inf_F f(x, y), \quad \psi_G(y) = \sup_G f(x, y).$$

Согласно этим обозначениям

$$\varphi(x) \equiv \varphi_Y(x), \quad \psi(y) \equiv \psi_X(y).$$

Очевидно, $\varphi_{F_1}(x) \geq \varphi_{F_2}(x)$; $\psi_{G_1}(y) \leq \psi_{G_2}(y)$, если $F_1 \subset F_2$, $G_1 \subset G_2$. Условимся говорить, что функция $z'(t)$ является *мажорантой* (*минорантой*) функции $z(t)$ на некотором подмножестве S ее множества определения, если

$$z(t) < z'(t), \quad t \in S, \quad (z(t) > z'(t), \quad t \in S).$$

Л е м м а 5. Пусть функция $f(x, y)$ полунепрерывна сверху по $x \in X$. Если $\varphi'(x)$ — непрерывная мажоранта функции $\varphi(x)$ на компакте $G \subset X$, то найдется такое множество F_1 , состоящее из конечного числа точек множества Y , что $\varphi'(x)$ будет также мажорантой функции $\varphi_{F_1}(x)$ на G . Пусть функция $f(x, y)$ полунепрерывна снизу по $y \in Y$. Если $\psi'(y)$ — непрерывная миноранта функции $\psi(y)$ на компакте F , то найдется такое конечное подмножество G_1 множества X , что $\psi'(y)$ будет также минорантой функции $\psi_{G_1}(y)$ на F .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как обычно, ограничимся обоснованием лишь первой части утверждения леммы.

Согласно определению функции $\varphi'(x)$ для любой точки $x_0 \in G$ найдется такая точка $y_0 = y(x_0) \in Y$, что

$$f(x_0, y_0) < \varphi'(x_0).$$

В силу полунепрерывности сверху по x функции $f(x, y_0)$ и непрерывности $\varphi'(x)$ найдется такая окрестность $\delta(x_0)$ точки x_0 , в пределах которой последнее неравенство сохранится, т. е.

$$f(x, y_0) < \varphi'(x), \quad \text{если } x \in \delta(x_0).$$

Компакт G оказался покрытым окрестностями $\delta(x)$:

$$G \subset \bigcup_{x \in G} \delta(x).$$

Следовательно, по известной теореме Гейне — Бореля найдется такой конечный набор точек $x_1, x_2, \dots, x_N \in G$,

что

$$G \subset \bigcup_{\alpha=1}^N \delta(x_\alpha).$$

Положим $F_1 = \bigcup_{\alpha=1}^N \{y_\alpha\}$, где $y_\alpha = y(x_\alpha)$. Пусть x — произвольная точка компакта G . Выберем такой индекс i , что $x \in \delta(x_i)$. Тогда

$$f(x, y_i) < \varphi'(x), \text{ где } y_i = y(x_i).$$

Но $\varphi_{F_1}(x) = \min_{1 \leq \alpha \leq N} \varphi(x, y_\alpha) \leq f(x, y_i)$. Следовательно,

$$\varphi_{F_1}(x) < \varphi'(x).$$

Лемма доказана.

Введем множества точек X^* и Y^* , в которых функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ достигают верхней и нижней граней соответственно, т. е. положим

$$X^* = \{x: \varphi(x) = \sup_{x' \in X} \varphi(x'), \quad x \in X\},$$

$$Y^* = \{y: \psi(y) = \inf_{y' \in Y} \psi(y'), \quad y \in Y\}.$$

Если множество X^* (Y^*) непусто и функция $f(x, y)$ выпукла вверх (вниз) на выпуклом множестве X (Y), то множество X^* (Y^*) выпукло (это легко проверяется непосредственно с использованием леммы 3); если к тому же функция $f(x, y)$ непрерывна по $x \in X$ (по $y \in Y$), то X^* (Y^*) — замкнутое множество [это вытекает из полунепрерывности в соответствующую сторону функции $\varphi(x)$ или $\psi(y)$].

Т е о р е м а 2. Пусть функция $f(x, y)$ выпукла вверх по $x \in X$ и выпукла вниз по $y \in Y$, X и Y — выпуклые множества; одно из множеств X^* и Y^* непусто и ограничено, причем функция $f(x, y)$ непрерывна по соответствующему переменному, а соответствующее множество X или Y замкнуто. В таком случае

$$\sup_X \inf_Y f(x, y) = \inf_Y \sup_X f(x, y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим, как и прежде,

$$v_1 = \sup_{x \in X} \varphi(x), \quad v_2 = \inf_{y \in Y} \psi(y).$$

Пусть для определенности множество Y^* непусто и ограничено, множество Y замкнуто и функция $f(x, y)$ непрерывна по $y \in Y$ при любом фиксированном $x \in X$. Вначале предположим, что число v_2 конечно, т. е. с учетом леммы 2

$$-\infty \leq v_1 \leq v_2 < \infty. \quad (32)$$

Если бы множество Y было ограниченным, то утверждение теоремы 2 вытекало бы из теоремы 1. В дальнейшем будем считать Y неограниченным множеством. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и введем множества:

$$Y_\varepsilon = \{y : \rho(y^*, Y^*) \leq \varepsilon, y \in Y\},$$

$$\Gamma_\varepsilon = \{y : \varepsilon \leq \rho(y, Y^*) \leq 2\varepsilon, y \in Y\},$$

где $\rho(y, Y^*)$ — расстояние от точки y до множества Y^* . В силу ограниченности Y^* и неограниченности Y оба введенных множества непусты и ограничены. Кроме того, они, очевидно, замкнуты. Итак, Y_ε и Γ_ε — непустые компакты.

Согласно определению множества Γ_ε

$$\psi(y) > v_2, y \in \Gamma_\varepsilon,$$

т. е. v_2 является минорантой функции $\psi(y)$ на Γ_ε . Следовательно, по лемме 5 найдется такое конечное множество $G_1 \subset X$, что

$$\psi_{G_1}(y) > v_2, y \in \Gamma_\varepsilon.$$

Далее,

$$\psi(y) > v_2 - \varepsilon, y \in Y_\varepsilon.$$

Поэтому найдется такое конечное множество $G_2 \subset X$, что

$$\psi_{G_2}(y) > v_2 - \varepsilon, y \in Y_\varepsilon.$$

Положим $G = G_1 \cup G_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Тогда

$$\psi_G(y) \geq \psi_{G_1}(y) > v_2, y \in \Gamma_\varepsilon; \quad (33)$$

$$\psi_G(y) \geq \psi_{G_2}(y) > v_2 - \varepsilon, y \in Y_\varepsilon. \quad (34)$$

Покажем, что $\psi_G(y) > v_2$ для любого $y \notin Y_\varepsilon$. Если $y \in \Gamma_\varepsilon$, то это вытекает из (33). Пусть теперь $\rho(y, Y^*) > 2\varepsilon$. Выберем любую точку $y^* \in Y^*$ и рассмотрим отрезок Δ ,

соединяющий точки y^* и y . В силу непрерывности функции $\rho(y, Y^*)$ на отрезке Δ найдется точка $y' \in \Gamma_\varepsilon$. Если допустить, что $\psi_G(y) \leq v_2$, то, поскольку $\psi_G(y^*) \leq \psi(y^*) = v_2$, а функция $\psi_G(y)$ выпукла вниз на Y (см. лемму 3),

$$\psi_G(y') \leq \alpha \psi_G(y^*) + (1 - \alpha) \psi_G(y)$$

при $0 < \alpha < 1$, т. е. мы получаем соотношение

$$\psi_G(y') \leq v_2, \quad y' \in \Gamma_\varepsilon,$$

которое несовместимо с (33) и, следовательно, доказывает наше утверждение. Итак,

$$\psi_G(y) > v_2, \quad \text{если } y \notin Y_\varepsilon.$$

С другой стороны, на множестве Y^* функция $\psi_G(y) \leq \psi(y) = v_2$. Значит, для любого множества $F \supset Y_\varepsilon$.

$$\inf_{y \in F} \psi_G(y) = \inf_{y \in Y_\varepsilon} \psi_G(y). \quad (35)$$

Зададимся последовательностью таких выпуклых компактов $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k \subset \dots$, что $Y_\varepsilon \subset F_1$, $\bigcup_k F_k = Y$.

В силу (34) и (35)

$$\inf_{y \in F_k} \psi_G(y) > v_2 - \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Вспомним, что

$$\psi_G(y) = \max_{1 \leq i \leq N} f(x_i, y).$$

Очевидно, $\psi_G(y)$ можно представить еще и так:

$$\psi_G(y) = \max_{\xi \in S} \sum_{i=1}^N f(x_i, y) \xi_i,$$

где

$$S = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Положим

$$\tilde{f}(\xi, y) = \sum_{i=1}^N f(x_i, y) \xi_i.$$

Тогда (36) может быть переписано в виде

$$\inf_{v \in F_k} \sup_{\xi \in S} \tilde{f}(\xi, y) > v_2 - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция $f(\xi, y)$ линейна по ξ и выпукла вниз по y , множества S и F_k — выпуклые компакты. Следовательно, по теореме 1

$$\sup_{\xi \in S} \inf_{v \in F_k} \tilde{f}(\xi, y) = \inf_{v \in F_k} \sup_{\xi \in S} \tilde{f}(\xi, y) > v_2 - \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Пусть $\sup_{\xi \in S} \inf_{v \in Y} \tilde{f}(\xi, y) = v$. Очевидно, для любого натурального k

$$\sup_{\xi \in S} \inf_{v \in F_k} \tilde{f}(\xi, y) \geq v.$$

С другой стороны, для любого $\delta > 0$ по лемме 5 найдется такое $k(\delta)$, что при $k \geq k(\delta)$

$$\sup_{\xi \in S} \inf_{v \in F_k} \tilde{f}(\xi, y) \leq v + \delta.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in S} \inf_{v \in F_k} \tilde{f}(\xi, y) = v. \quad (38)$$

Из (37) и (38) получаем

$$\sup_{\xi \in S} \inf_{v \in Y} \tilde{f}(\xi, y) = v \geq v_2 - \varepsilon. \quad (39)$$

В силу выпуклости вверх функции $f(x, y)$ по x при любом $y \in Y$.

$$\tilde{f}(\xi, y) = \sum_{i=1}^N f(x_i, y) \xi_i \leq f\left(\sum_{i=1}^N \xi_i x_i, y\right), \quad \xi \in S.$$

Поэтому

$$\inf_{i \in Y} \tilde{f}(\xi, y) \leq \inf_{i \in Y} f(x_i, y), \quad x_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i x_i \in X,$$

и, следовательно,

$$\sup_{\xi \in S} \inf_{i \in Y} \tilde{f}(\xi, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{i \in Y} f(x, y) = v_1. \quad (40)$$

Сравнивая (39), (40), получаем $v_2 \leq v_1 + \varepsilon$, или с учетом произвольности $\varepsilon > 0$

$$v_2 \leq v_1.$$

Если теперь вспомнить (32), то окончательно имеем $v_1 = v_2$.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось проанализировать случаи, когда v_2 не является конечным числом. Если $v_2 = -\infty$, то утверждение теоремы вытекает из леммы 2. Если же $v_2 = \infty$, то $\psi(y) \equiv \infty$, т. е. $Y = Y^*$ — компакт, и утверждение теоремы вытекает из теоремы 1.

Теорема 2 доказана полностью.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Вернемся к задаче выпуклого программирования (1)—(3) и попытаемся применить к ней теорему 2. Предполагая, что условия теоремы 2 соблюдаются для исходной задачи (1)—(3) или двойственной задачи (9)—(11) приходим к двум различным теоремам двойственности.

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$ и $f_i(x)$, где $i=1, 2, \dots, m$, непрерывны на множестве G , которое предполагается замкнутым; множество решений-планов задачи (1)—(3) непусто и ограничено. В таком случае задача выпуклого программирования (1)—(3) и двойственная ей задача (9)—(11) связана соотношением двойственности:

$$v = \tilde{v}.$$

Доказательство. Рассмотрим функционал Лагранжа

$$F(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x).$$

По условию теоремы 3 $F(x, y)$ — выпуклая вверх непрерывная функция $x \in G$ при любом $y \geq 0$. Далее, согласно лемме 1 задача (1) — (3) эквивалентна задаче

$$\varphi(x) = \inf_{y \geq 0} F(x, y) \rightarrow \sup, \quad x \in G,$$

т. е. верхние грани v и v' обеих задач равны и множество $X^* = \{x: \varphi(x) = v, x \in G\}$ совпадает с множеством решений-планов задачи (1) — (3). Применим теперь теорему 2, положив

$$f(x, y) = F(x, y), \quad x \in X = G, \quad y \in Y = \{y \geq 0\}.$$

Поскольку $f(x, y)$, помимо необходимых свойств выпуклости, непрерывна по x , G — замкнутое множество, X^* непусто и ограничено, то

$$v = \sup_{x \in G} \inf_{y \geq 0} F(x, y) = \tilde{v} = \inf_{y \geq 0} \sup_{x \in G} F(x, y).$$

Теорема 3 доказана.

Условимся говорить, что ограничения задачи (1) — (3) удовлетворяют *условию Слейтера* [12], если существует такая точка $x' \in G$, что $f_i(x') > 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 4. Если ограничения задачи выпуклого программирования (1) — (3) удовлетворяют условию Слейтера, то имеет место соотношение двойственности: $v = \tilde{v}$, причем в случае $v < \infty$ нижняя грань в двойственной задаче достигается.

Доказательство. Положим снова $f(x, y) = F(x, y)$, $X = G$, $Y = \{y \geq 0\}$. Поскольку $f(x, y)$ линейна, а значит, и непрерывна по y при фиксированном $x \in X$, Y — замкнутое множество, то в силу леммы 1 и теоремы 2 для доказательства соотношения двойственности достаточно проверить, что множество

$$Y^* = \{\psi(y) = \tilde{v}, y \geq 0\}$$

непусто и ограничено. Займемся этим. Предположим, что $\tilde{v} < \infty$ (теорема верна и без этого допущения, однако обоснование случая $\tilde{v} = \infty$ здесь приводиться не будет). Выберем теперь произвольную точку $y' \geq 0$, для которой $\psi(y') < \infty$. Имеем при любом $y \geq 0$

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \sup_{x \in G} \left[f(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) \right] \geq f(x') + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x') \geq \\ &\geq f(x') + \min_i f_i(x') \cdot \sum_{i=1}^m y_i = f(x') + \alpha \sum_{i=1}^m y_i, \end{aligned}$$

где $\alpha = \min_i f_i(x') > 0$, $x' \in G$ — точка, фигурирующая в условии Слейтера.

Пусть

$$y \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m y_i > \frac{\psi(y') - f(x')}{\alpha} = A,$$

тогда $\psi(y) > \psi(y') \geq \tilde{v}$. Следовательно, множество Y^* (если оно непусто) является подмножеством ограниченного множества

$$Q = \left\{ y: y \geq 0, \sum_{i=1}^m y_i \leq A \right\}.$$

Далее,

$$\tilde{v} = \inf_{y \geq 0} \psi(y) = \inf_{y \in Q} \psi(y).$$

Но функция $\psi(y)$ полунепрерывна снизу (лемма 4) и, следовательно, достигает своей нижней грани на компакте Q . Итак, Y^* — непустое ограниченное множество.

Теорема доказана.

Если ограничения задачи удовлетворяют условию Слейтера, то они, очевидно, не могут содержать линейных уравнений $l(x) = b$, т. е. пар линейных неравенств вида $l(x) \geq b$, $-l(x) \geq -b$. Однако после некоторой модификации условие Слейтера становится свободным от этого недостатка. Допустим, что ограничения (2) задачи

(1) — (3) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_i(x) &\geq 0, & i = 1, 2, \dots, m; \\ l_i(x) &= b_i, & i = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где $l_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$ — система линейно независимых линейных форм.

Если привести ограничения (41) к эквивалентной системе неравенств и составить двойственную к (1), (41), (3) задачу, то после очевидных преобразований она будет иметь вид

$$\psi(y) = \sup_{x \in G} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) + \sum_{i=1}^s y_{m+i} [l_i(x) - b_i] \right\}, \quad (42)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{m+s}),$$

$$\psi(y) \rightarrow \inf, \quad (43)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (44)$$

Будем говорить, что ограничения задачи (1), (41), (3) удовлетворяют *модифицированному условию Слейтера*, если существует такая точка x' , что $f_i(x') > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $l_i(x') = b_i$, $i = 1, 2, \dots, s$; x' — внутренняя точка множества G . Можно проверить (делается это примерно так же, как и при доказательстве теоремы 4), что модифицированное условие Слейтера влечет за собой непустоту и ограниченность множества Y^* . Поэтому из теоремы 2 (с учетом леммы 1) вытекает в качестве следствия

Т е о р е м а 5. *Если ограничения задачи выпуклого программирования (1), (41), (3) удовлетворяют модифицированному условию Слейтера, то эта задача связана с двойственной задачей (42)–(44) соотношением двойственности $v = \tilde{v}$, причем в случае $v < \infty$, нижняя грань в двойственной задаче достигается.*

Если бы среди требований модифицированного условия Слейтера не содержалось предположения о том, что x' — внутренняя точка G (будем в дальнейшем называть это предположение для краткости требованием *внутренности*), то теорема 5 содержала бы, в частности, теорему двойственности для линейного программирования. Приведем пример, показывающий, что даже при наличии одних

только линейных ограничений требование внутренности, вообще говоря, не может быть отброшено. Положим,

$$f(x) = -\exp\{- (x_1 x_2)^{1/2}\}, \\ l_1(x) - b_1 = x_2, \quad G = \{x = (x_1, x_2): x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Соответствующая задача имеет вид

$$-\exp\{- (x_1 x_2)^{1/2}\} \rightarrow \sup, \\ x_2 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Легко проверить, что $f(x)$ — выпуклая вверх функция, так что сформулированная задача является задачей выпуклого программирования. Требования модифицированного условия Слейтера, кроме требования внутренности, очевидно, соблюдаются (задача не содержит нелинейных ограничений). Проверим, что в данном случае соотношение двойственности не имеет места. Действительно,

$$v = \sup_{x \in R} f(x) = -1.$$

С другой стороны, при $y_1 > 0$ и $x_1 \geq 0$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} [-\exp\{- (x_1 x_2)^{1/2}\} + y_1 x_2] = \infty.$$

Следовательно,

$$\psi(y_1) = \sup_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} [-\exp\{- (x_1 x_2)^{1/2}\} + y_1 x_2] = \infty,$$

если $y_1 > 0$.

Пусть теперь $y_1 \leq 0$. В таком случае

$$-\exp\{- (x_1 x_2)^{1/2}\} + y_1 x_2 \leq 0$$

для любых $x_1, x_2 \geq 0$, причем, если $x_1^{(k)} = k^2, x_2^{(k)} = 1/k$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [-\exp\{- (x_1^{(k)} x_2^{(k)})^{1/2}\} + y_1 x_2^{(k)}] = 0.$$

Поэтому

$$\psi(y_1) = \sup_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} [-\exp\{- (x_1 x_2)^{1/2}\} + y_1 x_2] = 0.$$

Итак,

$$\psi(y_1) = \begin{cases} \infty, & \text{если } y_1 > 0, \\ 0, & \text{если } y_1 \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{v} = \inf_{y_1} \psi(y_1) = 0 > v = -1.$$

Остановимся на специальном классе задач выпуклого программирования, называемых обычно *кусочно-линейными*. Этот класс, в частности, включает общую задачу линейного программирования.

Условимся говорить, что $f(x)$ — *кусочно-линейная выпуклая вверх функция*, если

$$f(x) = \min_k \left\{ \sum_{j=1}^n d_j^{(k)} x_j + d^{(k)} \right\},$$

т. е. может быть представлена в виде минимума конечного числа линейных с точностью до постоянного слагаемого функций. Задача (1) — (3) называется задачей *кусочно-линейного программирования*, если f и f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, — кусочно-линейные выпуклые вверх функции, G — выпуклое многогранное множество.

Т е о р е м а 6. Если (1) — (3) — задача кусочно-линейного программирования с непустым множеством планов, то задачи (1) — (3) и (4) — (6) связаны соотношением двойственности, причем в случае $v = \tilde{v} < \infty$ верхняя грань в исходной задаче и нижняя грань в двойственной задаче достигаются на планах соответствующих задач.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $v = \infty$ очевиден (см. лемму 2). Поэтому предположим, что $v < \infty$. Приводимая ниже конструкция имеет много общего со способом доказательства теоремы 1. Отличие связано с линейностью функции Лагранжа $F(x, y)$ по y , что дает возможность ограничиться рассмотрением только линейных функций $\varphi(y)$, каждая из которых определяется $m + 1$ числами. В результате роль пространства непрерывных функций переходит к $(m + 1)$ -мерному пространству. Итак, пусть K — множество $(m + 1)$ -мерного пространства точек $z = (z_0, z_1, \dots, z_m)$, определяемое условием: $z \in K$ в том и

только в том случае, если найдется такая точка $x \in G$, что

$$z_0 \leq f(x), \quad z_i \leq f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (45)$$

Покажем, что K — выпуклое многогранное множество. Рассмотрим сначала множество \bar{K} точек $w = (z, x)$, определяемое неравенствами (45) и условием (3). Поскольку f, f_i — выпуклые кусочно-линейные функции, G — выпуклое многогранное множество, то \bar{K} — общая часть конечного числа полупространств, т. е. выпуклое многогранное множество. Следовательно, K , являющееся проекцией множества \bar{K} на пространство точек z , — также выпуклое многогранное множество. Определим теперь в $(m+1)$ -мерном пространстве луч $l: z_0 \geq v, z_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$. В силу замкнутости множества K точка $z^* = (v, 0, \dots, 0) \in K$ (отсюда, в частности, следует достижимость верхней грани v в исходной задаче). Остальные точки луча l лежат вне K (иначе бы существовали планы задачи (1) — (3), на которых функция $f(x)$ принимала значение, большее чем v). Таким образом, z^* — граничная точка K . Многогранное множество K — общая часть полупространств, порожденных конечным числом гиперплоскостей. Рассмотрим те из них, которые проходят через точку z^* . Среди этих гиперплоскостей заведомо имеются гиперплоскости, не параллельные оси z_0 (в противном случае множество K содержало бы точки луча l , отличные от z^*). Пусть Π — одна из них, $(\lambda_0, \lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ — ее направляющий вектор. Согласно выбору Π — опорная гиперплоскость для K в точке z^* , причем $\lambda_0 \neq 0$. Это означает, что

$$\lambda_0 z_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i \leq \lambda_0 v, \quad z \in K. \quad (46)$$

Из вида множества K следует, что (46) может иметь место лишь при

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Итак, $\lambda_0 > 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \geq 0$. Положим $\lambda^* = \lambda/\lambda_0; (z_0, z_1, \dots, z_m) = (f(x), f_1(x), \dots, f_m(x)), x \in G$.

Тогда согласно (46) при любом $x \in G$

$$f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) \leq v,$$

т. е.

$$\psi(\lambda^*) = \sup_{x \in G} F(x, \lambda^*) \leq v.$$

Но по лемме 2 $v \leq \tilde{v} \leq \psi(\lambda^*)$. Следовательно, $v = \tilde{v} = \psi(\lambda^*)$.

Теорема доказана!

Как уже отмечалось, отказ от требования внутренности в модифицированном условии Слейтера, вообще говоря, ведет к нарушению соотношения двойственности. Утверждение, формулируемое ниже, выделяет класс задач выпуклого программирования, для которых требование внутренности может быть отброшено.

Т е о р е м а 7. Пусть в задаче выпуклого программирования (1)–(3) функции $f_i(x)$ выпуклы вверх на открытом множестве $S \supset G$ при $i = 1, 2, \dots, m_1 < m$ и кусочно-линейны при $i = m_1 + 1, \dots, m$; функция $f(x)$ выпукла вверх на S , G — многогранное множество. Если существует план $x^{(0)}$ задачи (1)–(3), для которого $f_i(x^{(0)}) > 0$, $i = 1, 2, \dots, m_1$, то задачи (1)–(3) и (4)–(6) связаны соотношением двойственности, причем в случае $v = \tilde{v} < \infty$ нижняя грань в двойственной задаче достигается.

Доказательство теоремы опирается на следующее вспомогательное предложение.

Л е м м а 6. Если $f(x)$ — выпуклая вверх функция, определенная на открытом выпуклом множестве S , выпуклое множество $\Delta \subset S$ и $\sup_{x \in \Delta} f(x) = \alpha < \infty$, то существуют такие линейная функция $l(x)$ и число l_0 , что

$$f(x) \leq l(x) + l_0, \quad x \in S; \quad (47)$$

$$\sup_{x \in \Delta} [l(x) + l_0] = \alpha. \quad (48)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возможны два случая

$$\alpha = \sup_{x \in S} f(x) \text{ и } \alpha < \sup_{x \in S} f(x).$$

В первом случае, очевидно, линейная функция $l(x) \equiv 0$ и число $l_0 = \alpha$ удовлетворяют требованиям (47) и (48) леммы.

Поэтому обратимся ко второму случаю, обоснование которого составляет основную часть доказательства леммы.

Введем множество $\Gamma = \{x: f(x) > \alpha, x \in S\}$. В силу предположения $\Gamma \neq \emptyset$. Поскольку S — открытое выпуклое множество, а $f(x)$ — выпуклый вверх функционал, Γ — открытое выпуклое множество. Согласно определению $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$. Следовательно, по теореме о разделяющей гиперплоскости существует такая линейная функция $g(x) \neq 0$, что

$$\sup_{x \in \Delta} g(x) \leq \gamma \leq \inf_{x \in \Gamma} g(x). \quad (49)$$

В пространстве $\bar{E} = E \times L$, где L — пространство действительных чисел, E — пространство точек x , содержащее S , определим множество

$$C = \{\bar{x} = (x, x_0) : x_0 < f(x), x \in S\}$$

и линейное многообразие (гиперплоскость)

$$H = \{\bar{x} = (x, x_0) : g(x) = \gamma, x_0 = \alpha\}.$$

Проверим, что $C \cap H = \emptyset$. Действительно, в противном случае для некоторой точки $x' \in S$ мы имели бы

$$f(x') > \alpha, \quad g(x') = \gamma. \quad (50)$$

Однако поскольку $x' \in \Gamma$ вместе со своей достаточно малой окрестностью, то согласно (49) $\gamma \leq g(x' + x)$, если $|x| \leq \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число, или в силу (50)

$$g(x) \geq 0, \text{ если } |x| \leq \varepsilon,$$

что возможно только при $g(x) \equiv 0$.

Следовательно, соотношения (50) не могут иметь места, т. е. $C \cap H = \emptyset$. Кроме того, C — выпуклое множество. Поэтому опять же согласно теореме о разделяющей гиперплоскости найдется такая линейная функция

$\bar{g}(x) = g'(x) + g_0 x_0 \neq 0$, что

$$g'(x) + g_0 \alpha = \sigma, \quad \text{если } g(x) = \gamma, \quad (51)$$

$$g'(x) + g_0 x_0 \geq \sigma, \quad \text{если } x_0 < f(x), x \in S. \quad (52)$$

Из (52) вытекает, что $g_0 \leq 0$. Случай $g_0 = 0$ невозможен. В самом деле, предположив противное и выбрав $x' \in S$, для которого $g(x') = \gamma$ (такой x' заведомо найдется в силу (49)), получаем согласно (51) и (52)

$$g'(x - x') \geq 0, \quad \text{если } x \in S.$$

Последнее соотношение возможно лишь при $g'(x) \equiv 0$ (S — открытое множество). Итак, если $g_0 = 0$, то $\bar{g}(x) \equiv 0$, что противоречит выбору $\bar{g}(x)$. Следовательно, $g_0 \neq 0$, т. е. $g_0 < 0$. Из (52) следует, что

$$f(x) \leq (-1/g_0) g'(x) + \sigma/g_0, \quad x \in S. \quad (53)$$

Если положить $g''(x) = -g'(x)/g_0$, $\sigma' = \sigma/g_0$, то соотношения (51) и (53) могут быть переписаны в виде

$$g''(x) + \sigma' = \alpha, \quad \text{если } g(x) = \gamma, \quad (54)$$

$$g''(x) + \sigma' \geq f(x), \quad \text{если } x \in S. \quad (55)$$

Проверим, что из (54) следует

$$g''(x) \equiv \gamma_1 g(x), \quad (56)$$

где γ_1 — некоторое число. Выберем такой вектор $x^{(1)}$, что $g(x^{(1)}) = 1$. Тогда для любого вектора x имеет место представление

$$x = g(x) x^{(1)} + x^{(2)}, \quad \text{где } g(x^{(2)}) = 0.$$

Если $x^{(3)}$ — вектор, для которого $g(x^{(3)}) = \gamma$, то при $x^{(4)} = x^{(2)} + x^{(3)}$ получаем

$$x^{(2)} = x^{(4)} - x^{(3)}, \quad g(x^{(4)}) = g(x^{(3)}) = \gamma.$$

Итак,

$$x = g(x) \cdot x^{(1)} + x^{(4)} - x^{(3)}.$$

Согласно (54) $g''(x^{(4)}) = g''(x^{(3)}) = \alpha - \sigma'$. Следовательно, для любого вектора x

$$g''(x) = g(x) g''(x^{(1)}),$$

что эквивалентно (56) при

$$\gamma_1 = g''(x^{(1)}).$$

Покажем, что $\gamma_1 \geq 0$. Пусть, напротив, $\gamma_1 < 0$. Согласно (55) при любом $x \in \Gamma$

$$g''(x) > \alpha - \sigma',$$

или в силу (56)

$$g(x) < \frac{\alpha - \sigma'}{\gamma_1} = \gamma,$$

что противоречит (49) и доказывает наше утверждение.

Из (49) и (56) получаем

$$\sup_{x \in \Delta} g''(x) = \gamma_1 \sup_{x \in \Delta} g(x) \leq \gamma_1 \gamma = \alpha - \sigma'.$$

С другой стороны, согласно (55)

$$\sup_{x \in \Delta} g''(x) \geq \sup_{x \in \Delta} f(x) - \sigma' = \alpha - \sigma'.$$

Итак,

$$\sup_{x \in \Delta} g''(x) = \alpha - \sigma'.$$

Полученное равенство и соотношение (55) означают, что линейная функция $l(x) = g''(x)$ и число $l_0 = \sigma'$ удовлетворяют условиям (47) и (48) леммы и, следовательно, являются искомыми.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7. Без ограничения общности будем считать, что $v < \infty$. Положим

$$G_1 = \{x: f_i(x) \geq 0, i = m_1 + 1, \dots, m; x \in G\}$$

и запишем задачу (1) — (3) в эквивалентном виде

$$f(x) \rightarrow \sup, \quad (57)$$

$$f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1; \quad (58)$$

$$x \in G_1. \quad (59)$$

По предположению задача (57) — (59) удовлетворяет условию Слейтера. Следовательно, согласно теореме 4

найдется такой вектор $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{m_1}^*) \geq 0$, что

$$\sup_{x \in G_1} \left[f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* f_i(x) \right] = v. \quad (60)$$

Положим

$$f'(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* f_i(x).$$

Функция $f'(x)$ выпукла вверх на открытом множестве $S \supset G \supset G_1$. Следовательно, по лемме 6 найдутся такие вектор l и число l_0 , что

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq (l, x) + l_0, \quad x \in S; \\ \sup_{x \in G_1} f'(x) &= \sup_{x \in G_1} [(l, x) + l_0]. \end{aligned} \quad (61)$$

Учитывая (60), последнее равенство можно записать в виде

$$\sup_{x \in G_1} [(l, x) + l_0] = v. \quad (62)$$

Рассмотрим задачу кусочно-линейного программирования

$$\begin{aligned} (l, x) &\rightarrow \sup, \\ f_i(x) &\geq 0, \quad i = m_1 + 1, \dots, m; \quad x \in G; \end{aligned}$$

с непустым по предположению множеством планов. Из теоремы 6 и равенства (62) вытекает существование такого вектора

$$(\lambda_{m_1+1}^*, \dots, \lambda_m^*) \geq 0,$$

что

$$\sup_{x \in G} \left[(l, x) + \sum_{i=m_1+1}^m \lambda_i^* f_i(x) \right] = v - l_0. \quad (63)$$

Учитывая далее (61), (63) и вид функции $f'(x)$, получаем

$$\psi(\lambda^*) = \sup_{x \in G} \left[f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) \right] \leq v,$$

т. е.

$$\tilde{v} = \inf_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda) \leq \psi(\lambda^*) \leq v.$$

Но по лемме 2 $\tilde{v} \geq v$. Итак,

$$v = \tilde{v} = \psi(\lambda^*).$$

Теорема доказана.

Отметим, что теорема двойственности для задач линейного программирования — частный случай теоремы 7.

§ 4. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ, ЗАДАЧА ОБ ОТЫСКАНИИ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ, КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть $f(x, y)$ — функция пары векторных аргументов x и y , принадлежащих соответственно конечномерным выпуклым множествам X и Y . Функция $f(x, y)$, как мы знаем, порождает пару двойственных задач:

$$\varphi(x) \rightarrow \sup, \quad x \in X; \quad (64)$$

$$\psi(y) \rightarrow \inf, \quad y \in Y, \quad (65)$$

где

$$\varphi(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y), \quad \psi(y) = \sup_{x \in X} f(x, y).$$

Пара двойственных задач (64), (65) тесно связана с задачей об отыскании седловой точки функции $f(x, y)$. Займемся выяснением этой связи.

Последовательность $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$, $x^{(k)} \in X$, $y^{(k)} \in Y$, назовем *обобщенной седловой точкой* функции $f(x, y)$ при $x \in X$, $y \in Y$, если

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f(x, y^{(k)}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} f(x^{(k)}, y). \quad (66)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}, y^{(k)}) &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f(x, y^{(k)}), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}, y^{(k)}) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} f(x^{(k)}, y). \end{aligned}$$

Отсюда и из (66) получаем, что если $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$ — обобщенная седловая точка, то

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}, y^{(k)}) &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f(x, y^{(k)}) \leq \\ &\leq \lim_{\overline{x \rightarrow \infty}} \inf_{y \in Y} f(x^{(k)}, y) \leq \lim_{\overline{k \rightarrow \infty}} f(x^{(k)}, y^{(k)}). \end{aligned}$$

Кроме того, очевидно, $\lim_{\overline{k \rightarrow \infty}} \sup_{x \in X} f(x, y^{(k)}) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} f(x^{(k)}, y)$.

Следовательно, условия (66) могут быть переписаны в следующем эквивалентном виде:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} f(x, y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}, y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{y \in Y} f(x^{(k)}, y). \quad (67)$$

Допустим, что обобщенная седловая точка $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$ — стационарная последовательность, т. е. $\{x^{(k)}, y^{(k)}\} = \{x^{(0)}, y^{(0)}\}$. Из условий (67) обобщенной седловой точки получаем

$$\sup_{x \in X} f(x, y^{(0)}) = f(x^{(0)}, y^{(0)}) = \inf_{y \in Y} f(x^{(0)}, y),$$

или

$$f(x, y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}, y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}, y), \quad x \in X, y \in Y,$$

т. е. обычное определение седловой точки. Таким образом, понятие обобщенной седловой точки является естественным обобщением понятия седловой точки на случай последовательностей. Приводимое ниже предложение сводит вопрос о существовании обобщенной седловой точки к выяснению вопроса о соблюдении соотношения двойственности для соответствующей пары двойственных задач.

Т е о р е м а 8. *Для существования обобщенной седловой точки функции $f(x, y)$ при $x \in X, y \in Y$ необходимо и достаточно, чтобы задачи (64) и (65) были связаны соотношением двойственности:*

$$\sup_X \varphi(x) = \inf_Y \psi(y).$$

При этом любая пара $\{x^{(k)}\}$ и $\{y^{(k)}\}$ решений задач (64) и (65) соответственно составляет обобщенную седловую точку функции $f(x, y)$ при $x \in X, y \in Y$ и, наоборот, обобщенная седловая точка $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$ функции $f(x, y)$ при

$x \in X, y \in Y$ определяет решения $\{x^{(k)}\}$ и $\{y^{(k)}\}$ задач (64) и (65) соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $f(x, y)$ имеет обобщенную седловую точку при $x \in X$ и $y \in Y$ и этой точкой является последовательность $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$. Согласно (67)

$$v_2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}) \leq v_1,$$

где $v_1 = \sup_{x \in X} \varphi(x)$, $v_2 = \inf_{y \in Y} \psi(y)$. Используя далее лемму 2,

получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}) = v_1 = v_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(y^{(k)}),$$

т. е. $\{x^{(k)}\}$ и $\{y^{(k)}\}$ — решения задач (64) и (65) соответственно; задачи (64), (65) связаны соотношением двойственности.

2. Пусть задачи (64), (65) связаны соотношением двойственности, последовательности $\{x^{(k)}\}$ и $\{y^{(k)}\}$ — решения соответствующих задач. Это означает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}) = v_1 = v_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(y^{(k)}),$$

т. е. соблюдается (66), и значит, $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$ — обобщенная седловая точка функции $f(x, y)$ при $x \in X, y \in Y$.

В качестве следствия из теоремы 8 получаем критерий для седловой точки.

Т е о р е м а 9. Для существования седловой точки функции $f(x, y)$ при $x \in X, y \in Y$ необходимо и достаточно, чтобы задачи (64) и (65) были связаны соотношением двойственности, причем верхняя грань в (64) и нижняя грань в (65) достигались. Пара $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ является седловой точкой функции $f(x, y)$ при $x \in X, y \in Y$ в том и только в том случае, если $x^{(0)}$ — решение задачи (64), $y^{(0)}$ — решение задачи (65).

Приведенные выше утверждения позволяют получить эквивалентную формулировку любой из теорем двойственности для задач (1) — (3), (4) — (6) (в частности, теорем 3—7) в терминах седловой точки функции Лагранжа. Например, теорема 4 в этих терминах выглядит так:

Если ограничения (2) задачи выпуклого программирования (1)—(3) удовлетворяют условию Слейтера и $\{x^{(k)}\}$ — решение задачи, то существует такой вектор $y^* \geq 0$, что $\{x^{(k)}y^*\}$ — обобщенная седловая точка функции Лагранжа $F(x, y)$ при $x \in G$, $y \geq 0$.

Для обоснования этой формулировки достаточно заметить, что в силу теоремы 4 задачи (1)—(3) и (4)—(6) связаны соотношением двойственности, причем задача (4) — (6) имеет в качестве решения вектор $y^* \geq 0$, а затем использовать лемму 1 и теорему 8. В предположении существования оптимального плана задачи (1) — (3) теоремы 4 и 5 в терминах седловой точки функции Лагранжа были получены соответственно Куном — Таккером [10] и Удзавой [8]. Теорема 7 при более ограничительных по сравнению с приведенными здесь предположениях была доказана Г. Ш. Рубинштейном [7] (опять-таки в терминах седловой точки).

С теоремами двойственности тесно связаны так называемые *критерии оптимальности* — необходимые и достаточные условия для того, чтобы некоторый план-последовательность задачи (1) — (3) был ее решением.

Т е о р е м а 10 (первый критерий оптимальности). Пусть $X = \{x^{(k)}\}$ — план-последовательность задачи (1) — (3), $f(X) < \infty$. Для того чтобы X был решением задачи (1) — (3), достаточно, а в случае соблюдения соотношения двойственности ($v = \bar{v}$) и необходимо, существование последовательности $\{y^{(k)}\}$, $y^{(k)} \geq 0$, такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^{(k)}y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} F(x, y^{(k)}), \quad (68)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^{(k)} f_i(x^{(k)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (69)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $X = \{x^{(k)}\}$ — решение задачи (1) — (3), причем задачи (1)—(3) и (4)—(5) связаны соотношением двойственности. Выберем в качестве $\{y^{(k)}\}$ решение двойственной задачи (4)—(5). По теореме 8 последовательность $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$ — обобщенная седловая точка функции Лагранжа $F(x, y)$ при $x \in G$, $y \geq 0$.

Следовательно, имеет место (67):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} F(x, y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x^{(k)}, y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{y \geq 0} F(x^{(k)}, y). \quad (70)$$

Равенство (68) вытекает из первого равенства соотношения (70); равенства (69) — следствия второго равенства (70), так как

$$\inf_{y \geq 0} F(x^{(k)}, y) = f(x^{(k)}).$$

2. Пусть $X = \{x^{(k)}\}$ — план-последовательность задачи (1)–(3), для которого соблюдаются соотношения (68) и (69). Из (69) и (68) имеем

$$f(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x^{(k)}, y^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} F(x, y^{(k)}).$$

Далее, если, как и прежде, под R понимать множество планов задачи (1) — (3), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} F(x, y^{(k)}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in R} F(x, y^{(k)}) \geq \sup_{x \in R} f(x),$$

так как при $x \in R$ $f_i(x) \geq 0$ для $i = 1, 2, \dots, m$; $y^{(k)} \geq 0$. Итак, $f(X) \geq \sup_{x \in R} f(x)$, т. е. X — решение задачи (1) — (3).

Теорема доказана.

Критерий оптимальности 1 справедлив для любой задачи типа (1) — (3), если только для нее гарантируется соблюдение соотношения двойственности. В частности, он имеет место для классов задач, выделенных условиями теорем 3–7. Если же, помимо соблюдения соотношения двойственности, известно, что одним из решений двойственной задачи является некоторый ее план (как, например, для задач, удовлетворяющих условиям теорем 4–7), то первый критерий оптимальности может быть уточнен.

Теорема 11 (второй критерий оптимальности). Пусть $X = \{x^{(k)}\}$ — план-последовательность задачи (1)–(3), $f(X) < \infty$. Для того чтобы X был решением этой задачи, достаточно, а в случае соблюдения соотношения двойственности и достижимости нижней грани в двойственной задаче и необходимо

существование вектора $y^* \geq 0$ такого, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^{(k)}, y^*) = \sup_{x \in G} F(x, y^*), \quad (71)$$

$$y_i^* = 0, \quad \text{если} \quad \overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} f(x^{(k)}) > 0. \quad (72)$$

Доказательство. Необходимость доказывається так же, как и в теореме 10; в качестве y^* выбирается план двойственной задачи, являющийся ее решением. Достаточность вытекает из теоремы 10.

В частности, если $X = \{x^*\}$, то условия (71), (72) переходят в

$$F(x^*, y^*) = \sup_{x \in G} F(x, y^*),$$

$$y_i^* = 0, \quad \text{если} \quad f_i(x^*) > 0.$$

Если критерий 2 содержит условия оптимальности плана в терминах множителей Лагранжа, то критерий 1 дает эти условия в терминах обобщенных множителей Лагранжа (последовательностей) и имеет более широкое поле для приложений. Критерии оптимальности допускают дальнейшую конкретизацию для отдельных классов задач типа (1)—(3) (например, для задач с линейными ограничениями или с дифференцируемыми функциями f и f_i). Однако на этом мы не будем останавливаться.

§ 5. КВАЗИВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ

До сих пор мы рассматривали условно экстремальные задачи, функции Лагранжа для которых обладают свойством выпуклости, или, более общо, рассматривали функции двух групп переменных, выпуклые вверх по одной группе переменных и выпуклые вниз по другой группе. Ниже мы кратко остановимся на возможности ослабления в некоторых утверждениях требований, связанных с предположением о выпуклости соответствующих функций.

Начнем с определения.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X , называется *квазивыпуклой вверх (вниз)*, если при

любом вещественном числе c множество

$$M_c = \{x: f(x) \geq c, x \in X\} \quad (M_c = \{x: f(x) \leq c, x \in X\})$$

выпукло.

Очевидно, если $f(x)$ — выпуклая вверх (вниз) функция, то она является также квазивыпуклой вверх (вниз) функцией. Обратное утверждение неверно, так как, например, любая монотонная функция одного переменного, определенная на некотором отрезке, является как квазивыпуклой вверх, так и квазивыпуклой вниз. Следовательно, класс квазивыпуклых вверх (вниз) функций шире класса выпуклых вверх (вниз) функций.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ переменных $x \in X, y \in Y$, где, как и прежде, X и Y — выпуклые подмножества некоторых евклидовых пространств. Положим

$$\varphi(x) = \inf_Y f(x, y), \quad \psi(y) = \sup_X f(x, y).$$

Имеет место следующая теорема Х. Никайдо [11], являющаяся квазивыпуклым аналогом теоремы Дж. фон Неймана (см. теорему 1).

Т е о р е м а 12. Если X и Y — выпуклые компакты, функция $f(x, y)$ квазивыпукла вверх по x при любом фиксированном $y \in Y$, квазивыпукла вниз по y при любом фиксированном $x \in X$ и непрерывна по переменным x, y , то функция $f(x, y)$ имеет хотя бы одну седловую точку относительно X, Y , причем

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \\ &= \psi(y_0) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = f(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (73)$$

где (x_0, y_0) — произвольная седловая точка функции $f(x, y)$ при $x \in X, y \in Y$.

Доказательство этой теоремы основано на известной теореме С. Какутани о неподвижной точке. Прежде чем привести формулировку теоремы С. Какутани, введем одно необходимое понятие.

Пусть $\Phi(z)$ — точечно-множественное отображение, ставящее в соответствие каждой точке z множества Z некоторое множество $\Phi(z) \subset Z$. Говорят, что отображение

$\Phi(z)$ *полу непрерывно сверху* в точке $z_0 \in Z$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|z - z_0| < \delta$ множество $\Phi(z)$ содержится в ε -окрестности множества $\Phi(z_0)$.

Т е о р е м а С. К а к у т а н и. Пусть $\Phi(z)$ — *точечно-множественное отображение точек выпуклого компакта z в его выпуклые замкнутые подмножества*. Если отображение $\Phi(z)$ *полу непрерывно сверху в каждой точке $z \in Z$, то оно обладает неподвижной точкой, т. е. существует такая точка $z_0 \in Z$, что*

$$z_0 \in \Phi(z_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 12. Пусть $Z = X \times Y$. Положим для $z = (x, y) \in Z$

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \{x': f(x', y) = \max_{x'' \in X} f(x'', y), x' \in X\} \times \\ &\times \{y': f(x, y') = \min_{y'' \in Y} f(x, y''), y' \in Y\} = \Phi_x(z) \times \Phi_y(z). \end{aligned}$$

В силу квазивыпуклости вверх (вниз) функции $f(x, y)$ по соответствующим аргументам и непрерывности этой функции множество $\Phi(z) \subset Z$ при любом $z \in Z$ является непустым выпуклым замкнутым множеством. Покажем, что отображение $\Phi(z)$ *полу непрерывно сверху в любой точке $z \in Z$* . Действительно, если бы это было не так, то нашлись бы точки $z^{(k)} \rightarrow z$ при $k \rightarrow \infty$ такие, что для любого k множество $\Phi(z^{(k)})$ имеет точку $w^{(k)}$, лежащую вне ε -окрестности множества $\Phi(z)$ при некотором $\varepsilon > 0$, т. е.

$$\rho(w^{(k)}, \Phi(z)) \geq \varepsilon, w^{(k)} \in \Phi(z^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Без ограничения общности можно считать, что $\{w^{(k)}\}$ — сходящаяся последовательность (в противном случае мы, воспользовавшись компактностью множества Z , содержащего точки $w^{(k)}$, выделили бы из $\{w^{(k)}\}$ сходящуюся подпоследовательность и заменили ею последовательность $\{w^{(k)}\}$). Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)} = w^* = (x^*, y^*).$$

Тогда, с одной стороны,

$$\rho(w^*, \Phi(z)) \geq \varepsilon > 0. \quad (74)$$

С другой стороны, поскольку $w^{(k)} = (\bar{x}^{(k)}, \bar{y}^{(k)}) \in \Phi(z^{(k)})$, где $z^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)})$, то

$$\begin{aligned} f(\bar{x}^{(k)}, y^{(k)}) &\geq f(x', y^{(k)}), & x' \in X, \\ f(x^{(k)}, \bar{y}^{(k)}) &\leq f(x^{(k)}, y'), & y' \in Y. \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности в последних соотношениях, получаем

$$\begin{aligned} f(x^*, y) &\geq f(x', y), & x' \in X, \\ f(x, y^*) &\leq f(x, y'), & y' \in Y, \end{aligned}$$

т. е. $w^* = (x^*, y^*) \in \Phi(z)$, $z = (x, y)$, что противоречит (74).

Следовательно, отображение $\Phi(z)$ полунепрерывно сверху, и мы можем применить к нему теорему С. Какутани. Согласно этой теореме найдется такая точка $z^* = (x^*, y^*) \in Z$, что $z^* \in \Phi(z^*)$, т. е.

$$f(x^*, y^*) = \max_{x \in X} f(x, y^*) = \min_{y \in Y} f(x^*, y).$$

Таким образом, (x^*, y^*) — седловая точка функции $f(x, y)$ при $x \in X$, $y \in Y$.

Пусть теперь (x_0, y_0) — произвольная седловая точка функции $f(x, y)$ при $x \in X$, $y \in Y$, т. е.

$$\psi(y_0) = \max_{x \in X} f(x, y_0) = f(x_0, y_0) = \min_{y \in Y} f(x_0, y) = \varphi(x_0). \quad (75)$$

Но согласно лемме 2 при любых $x \in X$, $y \in Y$

$$\psi(y) \geq \varphi(x).$$

Из (75) и последнего неравенства получаем (73).

Теорема 12 доказана.

Основное утверждение теоремы Х. Никайдо, подобно теореме Дж. фон Неймана, имеет место при более слабых чем в теореме 12 предположениях относительно множеств X и Y . Поскольку обоснование приведенного ниже утверждения мало отличается от доказательства теоремы 2, мы ограничимся лишь его формулировкой¹⁾. Введем, как и прежде, множества X^* и Y^* , состоящие из точек, в ко-

¹⁾ Доказательство теоремы 13 можно найти в [2].

торых соответственно $\varphi(x)$ достигает своего максимума на X и $\psi(y)$ достигает своего минимума на Y .

Т е о р е м а 13. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$, квазивыпукла вверх по $x \in X$ при любом фиксированном $y \in Y$, квазивыпукла вниз по $y \in Y$ при любом фиксированном $x \in X$, X и Y — выпуклые замкнутые множества. Если одно из множеств X^* , Y^* непусто и ограничено, то

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y).$$

В теореме 13 одно требование ослаблено по сравнению с теоремой 2 — вместо выпуклости предполагается квазивыпуклость. Зато другое требование усилено: в теореме 13 функций $f(x, y)$ предполагается непрерывной по обоим группам переменных, тогда как в теореме 2 это предположение относится только к той группе переменных, которой соответствует непустое ограниченное множество X^* или Y^* . Теорему 13, подобно теореме 2, можно использовать для доказательства теорем двойственности в условно экстремальных задачах. Однако применение этой теоремы связано с определенными трудностями, на которых имеет смысл остановиться. Рассмотрим задачу (1) — (3), в которой множество G выпукло, а функции $f(x)$ и $f_i(x)$ квазивыпуклы вверх. Будем в дальнейшем называть ее *задачей квазивыпуклого программирования*. Как и в случае задачи выпуклого программирования, мы можем ввести функцию Лагранжа

$$F(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x), \quad x \in G, \quad y \geq 0. \quad (76)$$

В силу леммы 1 исходная задача эквивалентна задаче:

$$\varphi(x) = \inf_{y \geq 0} F(x, y) \rightarrow \sup, \quad x \in G. \quad (77)$$

Если, как и прежде, ввести двойственную задачу:

$$\psi(y) = \sup_{x \in G} F(x, y) \rightarrow \inf, \quad y \geq 0,$$

то теоремы двойственности сводятся к установлению

различных условий, при которых имеет место равенство

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y). \quad (78)$$

Казалось бы, для доказательства соотношения (78) следует привлечь теорему 13. Однако это невозможно вследствие того, что функция $F(x, y)$, вообще говоря, не является квазивыпуклой вверх по x . Дело в том, что класс квазивыпуклых функций, включающий в себя класс выпуклых функций, не обладает одним полезным качеством, свойственным последнему: сумма двух квазивыпуклых вверх (вниз) функций не обязана быть функцией того же класса. В этом легко убедиться на примерах функции одного переменного.

Итак, функция Лагранжа (76) в случае задачи квазивыпуклого программирования оказывается малоудобной. Необходимо, видимо, конструировать другие функции Лагранжа. От функции Лагранжа $F(x, y)$ следует требовать соблюдения лишь двух свойств:

1) задача (77), построенная по функции Лагранжа, должна быть эквивалентной исходной задаче (множество $y \geq 0$ в общем случае можно заменить на какое-то выпуклое множество Y);

2) функция $F(x, y)$ должна быть квазивыпукла вверх по x и квазивыпукла вниз по y .

Если для некоторого подкласса задач квазивыпуклого программирования подобная функция построена, то для получения теорем двойственности, связывающих исходную и двойственную задачи, достаточно воспользоваться теоремой 13.

В качестве примера рассмотрим задачу дробно-выпуклого программирования вида:

$$f(x) = \min_{1 \leq i \leq t} \frac{f'_i(x)}{f''_i(x)} \rightarrow \sup, \quad (79)$$

$$f_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (80)$$

$$x \in G. \quad (81)$$

Здесь $f'_i(x), i = 1, 2, \dots, t, f_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ — выпуклые вверх функции, определенные на выпуклом множестве G , $f''_i(x), i = 1, 2, \dots, t$ — линейные (с точностью до

постоянных) функции, определенные на G . Предполагается, что

$$\min_{1 \leq i \leq t} f_i''(x) \geq \alpha > 0,$$

когда $x \in G$, так что функция $f(x)$ определена во всех точках множества G . Функция $f(x)$, вообще говоря, не является выпуклой вверх, однако она квазивыпукла вверх, так как при любом c

$$M_c = \{f(x) \geq c, x \in G\} = \bigcap_{i=1}^t \{f_i'(x) - cf_i''(x) \geq 0\} \cap G$$

— выпуклое множество.

Положим

$$F(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^t y_i f_i'(x) + \sum_{i=1}^m y_{t+i} f_i(x)}{\sum_{i=1}^t y_i f_i''(x)},$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{t+m}) \geq 0, \quad x \in G.$$

Можно проверить, что функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), если вместо множества $y \geq 0$ рассматривать

$$Y = \left\{ y: y \geq 0, \sum_{i=1}^t y_i = 1 \right\}.$$

Функция $F(x, y)$ является функцией Лагранжа задачи (79) — (81); с ее помощью строится двойственная задача.

Итак, функция Лагранжа, имеющая в случае задачи выпуклого программирования вид (76), при переходе к задачам квазивыпуклого программирования должна, вообще говоря, конструироваться по-другому.

§ 6. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Рассмотрим функцию $f(x, y)$, выпуклую вверх по $x \in X$ и выпуклую вниз по $y \in Y$. Введем снова функции

$$\varphi(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y) \quad \text{и} \quad \psi(y) = \sup_{x \in X} f(x, y).$$

Как известно (теорема 1), в предположении ограниченности

одного из выпуклых множеств X , Y и непрерывности $f(x, y)$ по соответствующему переменному

$$v_1 = \sup_{x \in X} \varphi(x) = v_2 = \inf_{y \in Y} \psi(y),$$

т. е. экстремальные задачи

$$\varphi(x) \rightarrow \sup, \quad x \in X; \quad (82)$$

$$\psi(y) \rightarrow \inf, \quad y \in Y, \quad (83)$$

связаны соотношением двойственности. Если отказаться от предположения об ограниченности одного из множеств X , Y , то может случиться, что $v_1 < v_2$.

Мы построим сейчас последовательность задач типа (82), которая «в пределе» связана с задачей (83) соотношением двойственности вне зависимости от ограниченности множеств X , Y .

Итак, пусть X и Y — выпуклые множества, Y — замкнутое множество, функция $f(x, y)$ выпукла вверх по $x \in X$, выпукла вниз и непрерывна по $y \in Y$. Положим

$$C_k = \{y: |y| \leq k\}, \quad Y_k = Y \cap C_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Без ограничения общности будем считать, что Y_k для любого k — непустое множество.

Пусть

$$\varphi_k(x) = \inf_{y \in Y_k} f(x, y); \quad v_1(k) = \sup_{x \in X} \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим семейство задач

$$\varphi_k(x) \rightarrow \sup, \quad x \in X, \quad k = 1, 2, \dots \quad (84)$$

Применим теорему 1 к функции $f(x, y)$, определенной на множестве $X \times Y_k$, $k = 1, 2, \dots$. Согласно этой теореме

$$v_1(k) = v_2(k) = \inf_{y \in Y_k} \psi(y). \quad (85)$$

Заметив далее, что $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, $Y_k \subset Y_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_2(k) = v_2,$$

и с учетом (85) приходим к следующему предельному соотношению двойственности:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_1(k) = v_2. \quad (86)$$

Допустим теперь, что

$$f(x, y) = F(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x)$$

— функция Лагранжа задачи выпуклого программирования (1) — (3), $X = G$, $Y = \{y: y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$. Поскольку функция $F(x, y)$ линейна, а значит, и непрерывна по y , то согласно (86)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(k) = \tilde{v}, \quad (87)$$

где

$$v(k) = \sup_{x \in G} \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \inf_{y \in Y_k} F(x, y),$$

$$\tilde{v} = \inf_{y \geq 0} \psi(y).$$

Воспользовавшись специальным видом функции Лагранжа $F(x, y)$ и множества Y_k , можно явным образом выполнить операцию «inf», участвующую в определении функции $\varphi_k(x)$. Положим для любого вещественного числа a

$$a^- = \begin{cases} -a, & \text{если } a \leq 0, \\ 0, & \text{если } a > 0. \end{cases}$$

В таком случае

$$\varphi_k(x) = f(x) - k \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2}, \quad x \in G. \quad (88)$$

Действительно, пусть $I(x) = \{i: f_i(x) < 0\}$. Если $I(x) = \emptyset$, то, с одной стороны,

$$\varphi_k(x) \leq F(x, 0) = f(x),$$

а с другой стороны,

$$F(x, y) \geq f(x)$$

при любом $y \geq 0$, т. е. $\varphi_k(x) \geq f(x)$.

Итак, при $I(x) = \phi$

$$\varphi_k(x) = f(x),$$

что соответствует формуле (88).

Предположим теперь, что $I(x) \neq \phi$. При любом $y \in Y_k$ ($y \geq 0$, $|y| \leq k$) имеем

$$F(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) \geq f(x) - \sum_{i=1}^m y_i f_i^-(x).$$

Используя далее неравенство Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} F(x, y) &\geq f(x) - \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2} \geq \\ &\geq f(x) - k \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi_k(x) = \inf_{y \in Y_k} F(x, y) \geq f(x) - k \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2}. \quad (89)$$

С другой стороны, если положить

$$y_i(x) = \frac{k f_i^-(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то вектор $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \in Y_k$, а значит,

$$\varphi_k(x) \leq F(x, y(x)) = f(x) - k \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2}. \quad (90)$$

Равенство (88) — следствие (89) и (90).

Введем понятие обобщенной исходной задачи. Будем говорить, что последовательность $X = \{x^{(k)}\}$, $x^{(k)} \in G$, является *обобщенным планом* задачи (1) — (3), если

а) существует конечный или бесконечный

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(X);$$

б) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i(x^{(k)}) \geq 0$ при любом $i = 1, 2, \dots, m$.

Множество обобщенных планов задачи (1) — (3) обозначим через \bar{R} и положим

$$\bar{v} = \begin{cases} \sup_{X \in \bar{R}} f(X), & \text{если } \bar{R} \neq \phi, \\ -\infty, & \text{если } \bar{R} = \phi. \end{cases}$$

Задачу максимизации функции $f(X)$ на множестве обобщенных планов \bar{R} назовем *обобщенной* задачей (1) — (3). Имеет место следующая обобщенная теорема двойственности:

Т е о р е м а 14. Пусть (1)—(3) — задача выпуклого программирования, $\tilde{v} < \infty$. В таком случае обобщенная задача (1) — (3) и двойственная задача (9)—(11) связаны соотношением двойственности, т. е.

$$\bar{v} = \tilde{v}. \quad (91)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть $X = \{x^{(k)}\}$ — обобщенный план задачи (1) — (3). Используя (88) и свойства а), б) последовательности X , имеем для любого t

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_t(x^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[f(x^{(k)}) - t \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x^{(k)})]^2} \right] = f(X).$$

Следовательно,

$$v(t) = \sup_{x \in \bar{G}} \varphi_t(x) \geq \sup_{x \in \bar{R}} f(X) = \bar{v}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Учитывая далее равенство (87), получаем

$$\tilde{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \geq \bar{v}. \quad (92)$$

В случае $\bar{R} = \phi$ число $\bar{v} = -\infty$, и неравенство (92) также имеет место. Если $\tilde{v} = -\infty$, то согласно (92)

$\bar{v} = \tilde{v} = -\infty$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать $\tilde{v} > -\infty$.

2. Из соотношения (87) вытекает существование последовательности $\bar{X} = \{\bar{x}^{(k)}\}$, $\bar{x}^{(k)} \in G$, такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\bar{x}^{(k)}) = \tilde{v}.$$

Пусть

$$I(x) = \{i: f_i(x) < 0, i = 1, 2, \dots, m\};$$

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)),$$

где

$$y_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } I(x) = \phi, \\ \frac{f_i^-(x)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2}}, & \text{если } I(x) \neq \phi. \end{cases}$$

Выберем такой вектор $y_0 \geq 0$, что $\psi(y_0) < \infty$ (существование этого вектора следует из предположения: $\tilde{v} < \infty$). Пусть $t > |y_0|$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y_0 + (t - |y_0|) y(x) \geq 0, \\ |\bar{y}| &\leq |y_0| + (t - |y_0|) |y(x)| \leq t, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{y} \in Y_t$. Следовательно,

$$\varphi_t(x) = \inf_{y \in Y_t} F(x, y) \leq F(x, \bar{y}) =$$

$$= F(x, y_0) - (t - |y_0|) \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2}.$$

Очевидно, $\psi(y_0) \geq F(x, y_0)$, и полученное неравенство приводит к соотношению

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(x)]^2} \leq \frac{\psi(y_0) - \varphi_t(x)}{t - |y_0|}, \quad t > |y_0|. \quad (93)$$

Подставим в (93) вместо x вектор $\bar{x}^{(t)}$ и устремим t к бесконечности. Получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i^-(\bar{x}^{(t)})]^2} \leq (\psi(y_0) - \tilde{v}) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - |y_0|} = 0,$$

т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(\bar{x}^{(t)}) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} [-f_i^-(\bar{x}^{(t)})] = 0 \quad (94)$$

для $i = 1, 2, \dots, m$. Поскольку $\varphi_k(\bar{x}^{(t)}) \leq F(\bar{x}^{(t)}, 0) = f(\bar{x}^{(t)})$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\bar{x}^{(t)}) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_k(\bar{x}^{(t)}) = \tilde{v}. \quad (95)$$

Учитывая далее (94), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\bar{x}^{(t)}) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} f(\bar{x}^{(t)}) \leq \bar{v}. \quad (96)$$

Из (95) и (96) вытекает

$$\bar{v} \geq \tilde{v}. \quad (97)$$

Неравенства (97) и (92) приводят к искомому равенству (91).

Заметим, что из (91), (96) и (97) следует существование

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\bar{x}^{(t)}) = f(\bar{X}),$$

причем $f(\bar{x}) = \bar{v}$, т. е. \bar{X} — оптимальный обобщенный план задачи (1) — (3).

Обобщенная теорема двойственности доказана здесь в предположении: $\tilde{v} < \infty$. Если $\tilde{v} = \infty$, то можно показать, что при $\bar{R} \neq 0$ равенство (91) также имеет место. Таким образом, если обобщенное соотношение двойственности для задачи выпуклого программирования оказывается нарушенным, то множество \bar{R} не содержит ни одного элемента, а $\tilde{v} = \infty$. Отмеченная возможность нарушения обобщенного соотношения двойственности реализуется даже в случае линейного программирования (это означает, что исходная и двойственная задачи линейного программирования имеют пустые множества планов).

§ 7. УСТОЙЧИВОСТЬ И МАРГИНАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В заключение остановимся на вопросах, связанных с непрерывной зависимостью от параметра множеств оптимальных планов исходной и двойственной задач, и получим условия, при соблюдении которых гарантируется непрерывность семейства этих множеств (теорема об устойчивости). В качестве приложения теоремы об устойчивости будут выведены формулы для маргинальных значений задачи выпуклого программирования.

Пусть $f(x, y, t)$ — функция, определенная и непрерывная на множестве $X \times Y \times T$, квазивыпуклая вверх по x при всех значениях y, t из $Y \times T$, квазивыпуклая вниз по y при всех значениях x, t из $X \times T$. Здесь X и Y — выпуклые замкнутые подмножества некоторых евклидовых пространств, T — метрическое пространство (в частности, T может быть евклидовым пространством).

Обозначим

$$\varphi(x, t) = \inf_{y \in Y} f(x, y, t),$$

$$\psi(y, t) = \sup_{x \in X} f(x, y, t).$$

Рассмотрим семейство пар двойственных задач:

$$\varphi(x, t) \rightarrow \sup, \quad x \in X; \quad (98)$$

$$\psi(y, t) \rightarrow \inf, \quad y \in Y. \quad (99)$$

Пусть

$$v_1(t) = \sup_{x \in X} \varphi(x, t), \quad v_2(t) = \inf_{y \in Y} \psi(y, t).$$

Введем множества решений задач (98), (99):

$$X(t) = \{x: \varphi(x, t) = v_1(t), x \in X\};$$

$$Y(t) = \{y: \psi(y, t) = v_2(t), y \in Y\}.$$

Имеет место следующая теорема об устойчивости множеств $X(t)$ и $Y(t)$ в фиксированной точке.

Т е о р е м а 15. Если для некоторой предельной точки $q \in T$ множества $X(q)$ и $Y(q)$ непусты и ограничены, то найдется такая окрестность $\delta(q) \subset T$ точки q , что для всех $t \in \delta(q)$ множества $X(t)$ и $Y(t)$ непусты,

$v_1(t) = v_2(t)$, причем точечно-множественные отображения $t \in \delta(q)$ в $X(t)$ и $Y(t)$ полунепрерывны сверху в точке q .

Доказательство. 1. Прежде всего отметим, что из теоремы 13 следует, что

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y, q) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y, q) = f(x_q, y_q, q),$$

где (x_q, y_q) — произвольная точка из $X(q) \times Y(q)$.

Положим

$$v(q) = \max_{x \in X} \varphi(x, q) = \min_{y \in Y} \psi(y, q). \quad (100)$$

Зададимся произвольным $\sigma > 0$ и обозначим через

$$X_\sigma = \{x: x \in X, \rho(x, X(q)) \leq \sigma\}$$

множество точек, принадлежащих X и отстоящих от $X(q)$ не более чем на σ .

Покажем, что при достаточно большом σ

$$\limsup_{t \rightarrow q} \sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t) \geq v(q). \quad (101)$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что этот факт неверен. Зафиксируем произвольное $\sigma > 0$. Тогда найдутся $\delta > 0$ и последовательность $t_k \rightarrow q$ такие, что

$$\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t_k) < v(q) - \delta \text{ для всех } k.$$

Из теоремы 13 следует, что

$$\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t_k) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X_\sigma} f(x, y, t_k) < v(q) - \delta,$$

т. е. найдется такая последовательность y_k , что

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_k, t_k) < v(q) - \delta \text{ для всех } k. \quad (102)$$

Покажем, что $|y_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Действительно, в противном случае можно, не уменьшая общности,

считать, что $y_k \rightarrow y^*$, $y^* \in Y$, т. е.

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y^*, q) \leq v(q) - \delta.$$

Из последнего неравенства с учетом (100) получим невозможное соотношение

$$\begin{aligned} v(q) &= \sup_{x \in X_\sigma} \inf_{y \in Y} f(x, y, q) = \\ &= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X_\sigma} f(x, y, q) \leq \sup_{x \in X_\sigma} f(x, y^*, q) \leq v(q) - \delta, \end{aligned}$$

которое и доказывает справедливость нашего утверждения.

Рассмотрим теперь произвольную точку $y_0 \in Y(q)$. Для нее

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_0, q) = v(q).$$

Вследствие непрерывности правой части последнего равенства по $t = q$ для любого $\varepsilon \geq 0$ найдется такое натуральное $k(\varepsilon)$, что для всех $k \geq k(\varepsilon)$

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_0, t_k) < v(q) + \varepsilon. \quad (103)$$

Для произвольного фиксированного $l > |y_0|$ определим последовательность

$$y_k^{(l)} = \frac{l}{|y_k|} y_k + \left(1 - \frac{l}{|y_k|}\right) y_0, \quad |y_k| \geq l,$$

которая имеет бесконечное число элементов, так как $|y_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Очевидно,

$$l - |y_0| \leq |y_k^{(l)}| \leq l + |y_0|. \quad (104)$$

Из квазивыпуклости вниз функции $\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y, t_k)$ по $y \in Y$ и соотношений (102) и (103) следует, что

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y_k^{(l)}, t_k) < v(q) + \varepsilon. \quad (105)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{y_k^{(l)}\}$ сходится к элементу $y^{(l)}$ (см. (104)).

Отметим явным образом зависимость $y^{(l)}$ от σ , положив $y^{(l)} = y^{(l)}(\sigma)$. Тогда из неравенства (105) получаем

$$\sup_{x \in X} f(x, y^{(l)}(\sigma), q) \leq v(q) + \varepsilon$$

или в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\sup_{x \in X_\sigma} f(x, y^{(l)}(\sigma), q) \leq v(q). \quad (106)$$

Из соотношения (104) получаем

$$l - |y_0| \leq |y^{(l)}(\sigma)| \leq l + |y_0|. \quad (107)$$

В соответствии с (107) без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} y^{(l)}(\sigma) = \bar{y}^{(l)}.$$

Тогда из (106) имеем

$$\psi(\bar{y}^{(l)}, q) = \sup_{x \in X} f(x, \bar{y}^{(l)}, q) \leq v(q). \quad (108)$$

Из (108) вытекает, что $\bar{y}^{(l)} \in Y(q)$ при любом $l > |y_0|$. Но в соответствии с (107) $|\bar{y}^{(l)}| \geq l - |y_0|$.

Итак, мы получили, что множество $Y(q)$ содержит элементы со сколь угодно большой нормой, что противоречит ограниченности $Y(q)$.

Тем самым утверждение (101) доказано.

2. Мы доказали, что для некоторого $\sigma > 0$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\delta'_\varepsilon(q)$ точки q , что

$$\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t) \geq v(q) - \varepsilon, \quad t \in \delta'_\varepsilon(q). \quad (109)$$

Установим теперь существование окрестности $\delta_x(q) \subset \subset \delta'_\varepsilon(q)$ точки q и $\varepsilon > 0$ таких, что

$$\varphi(x, t) < v(q) - \varepsilon \text{ для всех } x \notin X_\sigma, t \in \delta_x(q). \quad (110)$$

Введем множество $\Gamma_\sigma = \{x: x \in X, \sigma \leq \rho(x, X(q)) \leq 2\sigma\}$. В силу леммы 4 функция $\varphi(x, q)$ полунепрерывна сверху по x , и, следовательно,

$$\max_{x \in \Gamma_\sigma} \varphi(x, q) = \varphi(x', q) \text{ при некотором } x' \in \Gamma_\sigma.$$

Учитывая, что $X(q) \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, отсюда получаем

$$\max_{x \in \Gamma_\sigma} \varphi(x, q) < v(q) - \varepsilon \quad (111)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Согласно лемме 5 можно выбрать такое конечное множество $F \subset Y$, что из (111) будет вытекать неравенство

$$\min_{y \in F} f(x, y, q) < v(q) - \varepsilon, \quad x \in \Gamma_\sigma,$$

которое в силу непрерывности сохранится для некоторой окрестности $\delta_x(q) \subset \delta'_\varepsilon(q)$ точки q , т. е.

$$\varphi(x, t) \leq \min_{y \in F} f(x, y, t) < v(q) - \varepsilon, \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad t \in \delta_x(q). \quad (112)$$

Покажем, что для выбранных $\delta_x(q)$ и $\varepsilon > 0$ неравенство (110) действительно имеет место. В самом деле, если бы для некоторых $x' \notin X_\sigma$ и $t' \in \delta_x(q)$ это неравенство не соблюдалось, т. е. $\varphi(x', t') > v(q) - \varepsilon$, то, соединив точку $x'' \in X_\sigma$, для которой $\varphi(x'', t') \geq v(q) - \varepsilon$, и точку $x' \notin X_\sigma$ отрезком S , мы получили бы с учетом квазивыпуклости вверх функции $\varphi(x, t')$, что

$$\varphi(x, t') \geq v(q) - \varepsilon \quad (113)$$

для любого $x \in S$. Очевидно, отрезок S имеет общие точки с множеством Γ_σ ; пусть $x_0 \in S \cap \Gamma_\sigma$. Тогда согласно (113)

$$\varphi(x_0, t') \geq v(q) - \varepsilon, \quad x_0 \in \Gamma_\sigma, \quad t' \in \delta_x(q),$$

что противоречит (112).

Из (109) и (110) следует, что множество $X(t)$ при $t \in \delta_x(q)$ совпадает с множеством точек, в которых достигается $\sup_{x \in X_\sigma} \varphi(x, t)$. Последнее множество в силу леммы 4 непусто (X_σ — компакт). Следовательно, при любом $t \in \delta_x(q)$ множество $X(t)$ непусто, причем

$$X(t) \subset X_\sigma. \quad (114)$$

Аналогичный факт для множеств $Y(t)$, $t \in \delta_y(q)$ может быть установлен точно таким же образом.

Итак, если $t \in \delta(q) = \delta_x(q) \cap \delta_y(q)$, то, во-первых, множества $X(t)$ и $Y(t)$ непусты, а, во-вторых, по теореме 13 (см. (114)) $v_1(t) = v_2(t)$.

3. Для доказательства полунепрерывности сверху отображений $X(t)$ и $Y(t)$ в точке $t = q$ воспользуемся неравенствами

$$f(x, y_t, t) \leq f(x_t, y_t, t) \leq f(x_t, y, t), \quad (115)$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $x_t \in X(t)$, $y_t \in Y(t)$, $t \in \delta(q)$.

Если бы последнее утверждение теоремы было неверно, например, применительно к отображению $X(t)$, $t \in T$, то нашлись бы последовательности $t_k \rightarrow q$, $t_k \in \delta(q)$ и $x_k \in X(t_k)$ такие, что

$$\rho(x_k, X(q)) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \dots \quad (116)$$

Пусть y_k — произвольная точка $Y(t_k)$. В силу равномерной ограниченности множеств $X(t_k)$ и $Y(t_k)$ (см. (114)) можно без ограничения общности считать, что $x_k \rightarrow x^*$; $y_k \rightarrow y^*$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда из (115) вытекает

$$f(x, y^*, q) \leq f(x^*, y^*, q) \leq f(x^*, y, q),$$

где $x \in X$, $y \in Y$, т. е. $x^* \in X(q)$, что противоречит (116).

Теорема 15 доказана полностью.

Теорема 15 может быть использована при выводе формул, для так называемых маргинальных значений экстремальных задач.

Рассмотрим функцию $f(x, y, t)$, определенную на множества $X \times Y \times T$, где $T = [0, t_0]$. Если считать выполненными предположения теоремы 15 ($q=0$), то согласно этой теореме для некоторого $t' > 0$ множества $X(t)$ и $Y(t)$ непусты при $0 \leq t \leq t'$, причем

$$\varphi(t) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y, t) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y, t) = f(x_t, y_t, t),$$

где $x_t \in X(t)$, $y_t \in Y(t)$, $0 \leq t \leq t'$.

Приводимое ниже утверждение содержит условия, гарантирующие дифференцируемость функции $\varphi(t)$, и формулу, для производной этой функции. Число $\varphi'(0)$ принято называть *маргинальным значением* семейства задач (98), (99) при $t=0$, а соответствующее утверждение — *теоремой о маргинальных значениях*.

Т е о р е м а 16. Пусть выполнены предположения теоремы 15, функция $f(x, y, t)$ дифференцируема по t в точке $t = +0$ при любых (x, y) из некоторой окрестности Ω множества $X(0) \times Y(0)$, причем производная этой функции $f_t(x, y, 0)$ удовлетворяет условию

$$\frac{f(x, y, t) - f(x, y, 0)}{t} \rightarrow f_t'(x, y, 0) \quad \text{при } t \rightarrow +0$$

равномерно относительно $(x, y) \in \Omega$.

Тогда существует правая производная $\varphi'(0)$ функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$, причем

$$\varphi'(0) = \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f_t'(x, y, 0) = \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f_t'(x, y, 0). \quad (117)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 \leq t \leq t'$. Тогда множества $X(t)$ и $Y(t)$ непусты, причем

$$f(x_0, y_t, t) \leq f(x_t, y_t, t) \leq f(x_t, y_0, t) \quad (118)$$

где $(x_0, y_0) \in X(0) \times Y(0)$, $(x_t, y_t) \in X(t) \times Y(t)$.

Положим

$$\mu(x, y, t) = f(x, y, t) - f(x, y, 0) - t f_t'(x, y, 0), \\ (x, y) \in \Omega.$$

По условию теоремы

$$|\mu(x, y, t)| \leq \mu(t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (119)$$

где $\mu(t)$ не зависит от x, y и таково, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \mu(t) = 0. \quad (120)$$

Без ограничения общности можно считать, что $X(t) \times Y(t) \subset \Omega$, если $t \leq t'$ (в силу полунепрерывности сверху соответствующего точечно-множественного отображения). Поэтому соотношение (118) может быть переписано в виде

$$f(x_0, y_t, 0) + t f_t'(x_0, y_t, 0) - \mu(t) \leq f(x_t, y_t, t) \leq \\ \leq f(x_t, y_0, 0) + t f_t'(x_t, y_0, 0) + \mu(t). \quad (121)$$

Поскольку $(x_0, y_0) \in X(0) \times Y(0)$, то

$$f(x_t, y_0, 0) \leq f(x_0, y_0, 0) \leq f(x_0, y_t, 0).$$

Учитывая последние неравенства и соотношение (121), получаем следующие оценки для относительного приращения функции $\varphi(t)$:

$$f'_t(x_0, y_t, 0) - \frac{\mu(t)}{t} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq f'_t(x_t, y_0, 0) + \frac{\mu(t)}{t}. \quad (122)$$

Оценки (122) выведены для произвольных седловых точек

$$(x_0, y_0) \in X(0) \times Y(0) \text{ и } (x_t, y_t) \in X(t) \times Y(t).$$

Следовательно, из (122) вытекает

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y(t)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0) - \frac{\mu(t)}{t} &\leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq \\ &\leq \max_{x \in X(t)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0) + \frac{\mu(t)}{t}. \end{aligned} \quad (123)$$

Пусть по-прежнему X_ε и Y_ε — ε -окрестности множеств $X(0)$ и $Y(0)$ соответственно. При любом $t > 0$ через $\varepsilon(t)$ обозначим минимальное из чисел ε , при которых $X(t) \subset X_\varepsilon$, $Y(t) \subset Y_\varepsilon$. По теореме 15

$$\lim_{t \rightarrow +0} \varepsilon(t) = 0. \quad (124)$$

С учетом введенного обозначения оценки (123) приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y_{\varepsilon(t)}} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0) - \frac{\mu(t)}{t} &\leq \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq \\ &\leq \max_{x \in X_{\varepsilon(t)}} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0) + \frac{\mu(t)}{t}. \end{aligned} \quad (125)$$

Из соотношений (119) и (120) вытекает непрерывность функции $f'_t(x, y, 0)$ на Ω . Следовательно, непрерывны также функции

$$\max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0), \quad \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0),$$

и поэтому

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \min_{y \in Y_\varepsilon(t)} \max_{x \in X(t)} f'_t(x, y, 0) &= \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0), \\ \lim_{t \rightarrow +0} \max_{x \in X_\varepsilon(t)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0) &= \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0). \end{aligned} \right\} (126)$$

Оценки (125) и соотношения (120), (124), (126) приводят к неравенствам

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow +0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} &\leq \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0), \\ \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} &\geq \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0), \end{aligned}$$

из которых с учетом известного неравенства

$$\max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} f'_t(x, y, 0) \leq \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} f'_t(x, y, 0)$$

получаем искомое равенство (117).

Теорема доказана.

Рассмотрим семейство задач выпуклого программирования, зависящее от параметра $t \in [0, t_0]$:

$$f(x, t) \rightarrow \sup, \quad (127)$$

$$f_i(x, t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (128)$$

$$x \in X, \quad (129)$$

где $f(x, t)$, $f_i(x, t)$ — выпуклые вверх функции x , определенные и непрерывные на выпуклом замкнутом множестве X , $t \in [0, t_0]$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Пусть $v(t)$ — значение верхней грани (127) при условиях (128), (129).

Введем функции Лагранжа задач (127) — (129)

$$F(x, y, t) = f(x, t) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x, t)$$

и положим $Y = \{y: y = (y_1, \dots, y_m), \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$.

Как известно, задача, двойственная к (127)—(129) при фиксированном значении t , имеет вид

$$\psi(y, t) = \sup_{x \in X} F(x, y, t) \rightarrow \inf, \quad (130)$$

$$y \in Y. \quad (131)$$

Обозначим задачи (127) — (129) и (130), (131) при фиксированном значении $t \in [0, t_0]$ через $A(t)$ и $B(t)$ соответственно.

В качестве следствия из теоремы 16 получаем следующую теорему о маргинальных значениях задачи (127)—(129).

Т е о р е м а 17. Пусть задачи $A(0)$ и $B(0)$ разрешимы и множества их решений $X(0)$ и $Y(0)$ ограничены, функции $f_0(x, t) = f(x, t)$, $f_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$, дифференцируемы в точке $t = +0$ для любого x из некоторой окрестности X' множества $X(0)$ решений задачи $A(0)$, причем производные $\frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial t}$ этих функций удовлетворяют условию

$$\frac{f_i(x, t) - f_i(x, 0)}{t} \rightarrow \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial t} \quad \text{при } t \rightarrow +0$$

равномерно относительно $x \in X'$, $i = 0, 1, \dots, m$.

В таком случае функция $v(t)$ имеет правую производную $v'(0)$ в точке $t = 0$, причем

$$v'(0) = \max_{x \in X(0)} \min_{y \in Y(0)} \frac{\partial F(x, y, 0)}{\partial t} = \min_{y \in Y(0)} \max_{x \in X(0)} \frac{\partial F(x, y, 0)}{\partial t}. \quad (132)$$

Для доказательства теоремы 17 достаточно заметить, что согласно лемме 1 задача $A(t)$ может быть переписана в эквивалентном виде:

$$\varphi(x, t) = \inf_{y \in Y} F(x, y, t) \rightarrow \sup, \quad x \in X,$$

а затем воспользоваться теоремой 16.

Теорема 17 представляет собой обобщение на задачи выпуклого программирования известной теоремы о маргинальных значениях для задач линейного программирования.

Последняя теорема была сформулирована Х. Милсом [5], который доказал ее для случая прямоугольных матричных игр. Однако предложенное Х. Милсом доказательство этой теоремы для случая общей задачи линейного программирования, содержало ошибку. В дальнейшем оказалось ¹⁾, что для справедливости теоремы о маргинальных значениях общей задачи линейного программирования достаточно предположить ограниченными множества $X(0)$ и $Y(0)$ решений исходной и двойственной задач при $t = 0$. При этом было показано, что требование об ограниченности множеств $X(0)$ и $Y(0)$ является существенным. Таким образом, теорема 17 доказана в предельно слабых предположениях и содержит в качестве частного случая теорему о маргинальных значениях задачи линейного программирования.

¹⁾ По этому поводу см. гл. 3, § 5 книги [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольштейн Е. Г., Двойственные задачи выпуклого программирования, Экономика и матем. методы, 1, вып. 3 (1965).
2. Гольштейн Е. Г., С. М. Мошович, Непрерывная зависимость от параметра множества решений минимаксной задачи, Экономика и матем. методы, 4, вып. 6 (1968).
3. Гольштейн Е. Г., Д. Б. Юдин, Новые направления в линейном программировании, Изд-во «Советское радио», 1966.
4. Зуховицкий С. И., Л. И. Авдеева, Линейное и выпуклое программирование, изд. 2-е, перераб. и дополн., М., «Наука», 1967.
5. Милс Х., Маргинальные значения матричных игр и задач линейного программирования, сб. статей «Линейные неравенства и смежные вопросы» под редакцией Куна и Таккера, ИЛ, 1959.
6. Нейман Дж., К теории стратегических игр, сб. «Матричные игры», Физматгиз, 1961.
7. Рубинштейн Г. Ш., Несколько примеров двойственных экстремальных задач, сб. «Математическое программирование», «Наука», 1966.
8. Удзава Х., Теорема Куна — Таккера о вогнутом программировании, сб. «Исследования по линейному и нелинейному программированию», ИЛ, 1962.
9. Kneser H., Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux, C. R. Acad. Sci., Paris 234, № 25 (1952).
10. Kuhn H. W., A. W. Tucker, Non linear programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, Berkley and Los Angeles, Univ. of California Press, 1951.
11. Nicaïdo H., On von Neumann's minimax theorem, Pacific J. Math., № 4, 1954.
12. Slater M., Lagrange multipliers revisited, Cowles Commission Discussion Paper, Math., 1950.

Евгений Григорьевич Гольштейн

Выпуклое программирование.
Элементы теории

(Серия: «Экономико-математическая библиотека»)

М., 1970 г., 68 стр.

Редакторы: *С. М. Мовшович, Г. Я. Пирогова*

Техн. редактор *В. С. Никифорова*

Корректор *Т. А. Панькова*

Сдано в набор 25/II 1970 г. Подписано к печати 8/VI 1970 г.
Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 2,125. Условн. печ. л. 3,57.
Уч.-изд. л. 3,07. Тираж 13000 экз. Т-09732.
Цена книги 20 коп. Заказ № 182

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я тип. изд-ва «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

Е.Г.ГОЛЬШТЕЙН

**Выпуклое
программирование
элементы теории**



Цена 20 коп.

